ВОЕННО-ИНЖЕНЕРНАЯ КРАСНОЗНАМЕННАЯ
АКАДЕМИЯ имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Р. С. ГУТЕР и П. Г. ШНИРЕЛЬМАН

КРАТНЫЕ
и
КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

ИЗДАНИЕ ВИА
Москва — 1960

ВОЕННО-ИНЖЕНЕРНАЯ КРАСНОЗНАМЕННАЯ АКАДЕМИЯ
имени В. В КУЙБЫШЕВА

Р. С. ГУТЕР и П. Г. ШНИРЕЛЬМАН

КРАТНЫЕ
И
КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ИЗДАНИЕ ВИА
Москва — 1960

Р. С. Гутер и П. Г. Шнирельман. **Кратные и криволинейные интегралы.** Изд. ВИА, 1960.

В работе излагается раздел курса высшей математики — «Кратные и криволинейные интегралы».

Книга снабжена большим количеством примеров приложений геометрического и физического характера и предназначена в качестве пособия для слушателей ВИА им. В. В. Куйбышева.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга предназначена в качестве учебного пособия для слушателей Академии и написана в соответствии с программой по высшей математике, утвержденной в 1958 году. Параграфы 6 и 7 главы I предназначены лишь для факультета № 4, параграф 8 той же главы на этом факультете может быть опущен. На факультетах № 1 и 3 глава III обычно опускается, а глава II излагается в сокращенном виде. Поэтому при пользовании книгой следует руководствоваться указаниями лектора.

Авторы старались снабдить книгу возможно большим числом примеров приложений геометрического и физического характера; далеко не все из них следует считать обязательными для изучения.

Читателю следует иметь в виду, что при различных ссылках всюду используется общепринятая система: если в тексте имеется ссылка на номер формулы или параграфа без каких-либо дополнительных пояснений, то всегда подразумевается формула того же параграфа или параграф той же главы. В противном случае делаются более подробные указания.

За большую помощь при подготовке рукописи и изготовлении чертежей авторы выражают благодарность Е. П. Павленко.

Авторы будут признательны всем читателям за указания на возможные недостатки.

-

ГЛАВА I

ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла

Мы знаем, что основным понятием интегрального исчисления для функции одного переменного является *определенный интеграл*. К этому понятию приводит рассмотрение большого числа задач из различных областей физики, геометрии и т. д., из которых следует, прежде всего, назвать задачу отыскания площади криволинейной трапеции и задачу восстановления первообразной функции по производной. Эти задачи являются важнейшими в интегральном исчислении, и первостепенное значение имеет тот факт, что решаются они с помощью одного и того же понятия определенного интеграла.

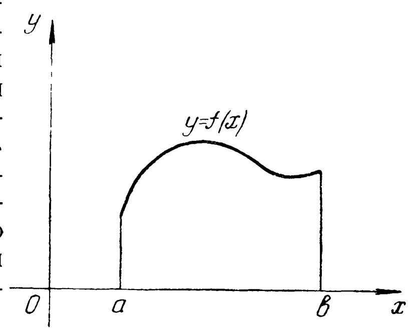


Рис. 1

Аналогичные задачи могут быть поставлены и для функции двух переменных.

С каждой функцией $y=f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, естественным образом связана плоская фигура, ограниченная графиком $y=f(x)$, участком оси Ox и ординатами, проведенными на границах; эту фигуру принято называть криволинейной трапецией (рис. 1). Точно так же, с функцией $z=f(x, y)$, заданной на области G, естественным образом связано тело, ограниченное поверхностью $z=f(x, y)$, областью G плоскости xOy и аппликатами, проведенными на границе. Последние образуют цилиндрическую поверхность, направляющей которой служит граница области G, а образующие параллельны оси Oz. Это тело мы будем называть *цилиндроидом* (рис. 2). Задача отыскания объема цилиндроида аналогична задаче отыскания площади криволинейной трапеции.

Далее, аналогом задачи о восстановлении первообразной функции по производной или по дифференциалу для функции одного переменного является задача восстановления функции двух переменных по ее полному дифференциалу или по двум первым частным производным.

Однако отыскание объема цилиндроида и восстановление функции двух переменных по полному дифференциалу не приводят к одному и тому же понятию. Эти задачи требуют совершенно различных методов и решаются разными путями. В соответствии с этим для функций двух переменных приходится определять два различных понятия интеграла — *двойной интеграл* и *криволинейный интеграл*.

Не следует думать, что возникновение этих двух понятий связано лишь с задачами, упомянутыми выше; в таком случае роль этих по-

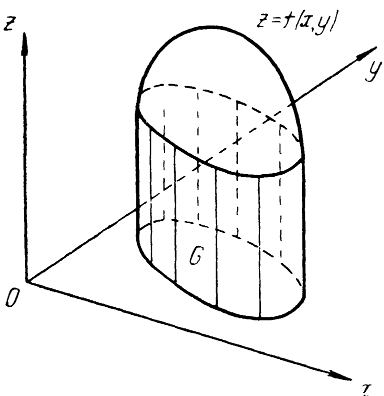


Рис. 2

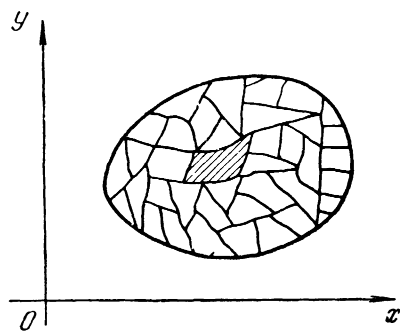


Рис. 3

нятий могла бы оказаться ограниченной. Существует много задач, приводящих к задачам интегрального исчисления для функций двух переменных. Однако в отличие от случая одной переменной здесь возможны две различные схемы решения.

В настоящем параграфе будут рассмотрены некоторые задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.

Задача 1. *Объем цилиндроида.* Пусть в области G плоскости xOy задана функция $z=f(x, y)$, непрерывная в каждой точке области, включая границу. Найдем объем цилиндроида, определенного этой функцией (см. рис. 2).

Как уже было указано, эта задача аналогична задаче нахождения площади криволинейной трапеции. Поэтому для ее решения естественно воспользоваться тем же приемом.

Разобьем область G определения функции $z=f(x, y)$ произвольным образом на элементарные части, как это показано, например, на рис. 3. Проведя через границу каждой площадки цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oz, разобьем цилиндроид на элементарные части, которые также являются цилиндроидами.

Занумеруем элементарные площадки-основания, а вместе с ними и элементарные цилиндроиды произвольным образом и рассмотрим один из них, имеющий номер i. Объем этого элементарного цилиндроида может быть приближенно подсчитан с учетом следующих соображений. Выберем на площадке произвольную точку (ξ_i, η_i) и заменим цилиндроид цилиндром с высотой $f(\xi_i, \eta_i)$ (рис. 4). Тогда

$$\Delta v_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta\sigma_i. \tag{1}$$

где Δv_i означает объем элементарного цилиндроида, а $\Delta\sigma_i$ — площадь элементарной площадки, лежащей в основании.

Чтобы получить приближенное значение объема цилиндроида, следует просуммировать выражения вида (1) по всем элементарным площадкам основания. Мы получим

$$v \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta\sigma_i. \tag{2}$$

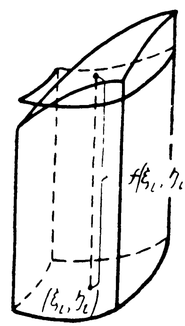


Рис. 4

Сумма (2) выражает объем цилиндроида лишь приближенно и содержит обычные ошибки, возникающие в результате замены элементарного цилиндроида цилиндром. Исключение этих ошибок достигается опять-таки обычным путем, с помощью предельного перехода.

Следует, однако позаботиться о том, чтобы при неограниченном возрастании числа элементарных площадок к нулю стремились не только их площади, но и все их размеры. Наиболее удобно это требование можно сформулировать, используя понятие диаметра. *Диаметром области* называется наибольшее расстояние между произвольной парой ее точек. Например, диаметр прямоугольника равен его диагонали, а диаметр эллипса — его большой оси.

Пользуясь этим термином, можно сказать, что *объем цилиндроида равен пределу суммы (2), когда число элементарных площадок неограниченно возрастает, причем диаметр каждой из них стремится к нулю,*

$$v = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max,\ \mathrm{diam}\ \sigma_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta\sigma\,. \tag{3}$$

Подчеркнем, что равенство (3) не следует считать о п р е д е л е н и е м понятия объема. Оно служит лишь для н а х о ж д е н и я его числового значения. Подробнее об этом см. в § 4.

З а д а ч а 2. *Масса плоского диска переменной плотности.* Рассмотрим плоский диск, который можно изобразить в прямоугольной системе координат на плоскости xOy в виде области, которую обозначим буквой G. Предположим, что толщина диска настолько мала, что изменением плотности по высоте можно пренебречь. Тогда можно рассматривать *поверхностную плотность,* т. е. массу единицы площади, определенную как предел отношения массы площадки к ее площади при стремлении последней к нулю. Поверхностная плотность будет зависеть лишь от положения точки или площадки на диске

$$\rho = \rho(x, y) \ г/см^2.$$

Если бы диск был однородным, то его масса равнялась бы произведению площади на поверхностную плотность

$$m = S\rho.$$

Для нахождения массы неоднородного диска разобьем его (т. е. область G) на элементарные площадки, которые можно считать настолько малыми, что изменением плотности на каждой площадке можно пренебречь (см. рис. 3).

Занумеровав элементарные площадки и выбрав на каждой из них произвольную точку (ξ_i, η_i), будем считать, что плотность во всех точках участка постоянна и равна плотности в выбранной точке. Масса этого участка будет равна

$$\Delta m_i = \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i. \tag{4}$$

Чтобы найти приближенное значение массы всего диска, следует просуммировать выражения (4), как и в предыдущей задаче, по всем элементарным площадкам, на которые разбита область. Тогда получаем

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i. \tag{5}$$

Для точного нахождения массы следует снова найти предел суммы (5) при неограниченном возрастании числа участков разбиения, когда диаметр каждого стремится к нулю,

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i. \tag{6}$$

Нетрудно убедиться, что математическая схема решения обеих задач одна и та же.

§ 2. Двойной интеграл и его свойства

Понятие двойного интеграла воспроизводит в абстрактной форме математическую схему, которая использовалась в предыдущем параграфе при решении конкретных задач отыскания объема цилиндроида или массы плоского диска.

Пусть функция $z=f(x, y)$ определена в некоторой области G плоскости xOy и непрерывна в этой области, включая границу. Разобьем область G на произвольные элементарные участки (см. рис. 3) и занумеруем эти участки.

Выберем на каждом элементарном участке произвольную точку с координатами (ξ_i, η_i) и составим произведение значения функции в выбранной точке на площадь соответствующего участка разбиения

$$f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta\sigma_i.$$

Сумма таких произведений, распространенная на все участки области G,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta\sigma_i, \tag{1}$$

называется *двойной интегральной суммой*, составленной для функции $f(x, y)$ по области G.

Двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области G называется предел двойной интегральной суммы, когда число элементарных участков разбиения неограниченно возрастает, причем диаметр каждого стремится к нулю. Предполагается, что предел существует и не зависит от способа разбиения области и выбора точек (ξ, η). Двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области G обозначается символом $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$. Таким образом,

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta\sigma\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta\sigma_i. \tag{2}$$

В правой части равенства (2) мы без труда узнаем выражение для объема цилиндроида, полученное в предыдущем параграфе, что позволяет уяснить геометрический смысл двойного интеграла. *Двойной интеграл от положительной функции геометрически выражает объем цилиндроида.*

Не следует, однако, отождествлять понятие двойного интеграла с понятием объема. В зависимости от геометрического или физического смысла функции $f(x, y)$ и ее аргументов двойной интеграл может иметь различный геометрический или физический смысл. Подробнее речь об этом будет идти ниже.

Функция $f(x, y)$, для которой существует двойной интеграл по области G, называется *интегрируемой* в этой области.

Важную роль играют *условия интегрируемости* функции двух переменных, т. е. условия, при которых можно гарантировать существование двойного интеграла от функции по данной области. В отличие от интегрального исчисления для функций одного переменного здесь интегрируемость зависит не только от свойств функции, но также и от свойств области.

Чтобы лучше выяснить смысл условий теоремы существования, рассмотрим несколько иное определение двойного интеграла, которое позволит также объяснить происхождение применяющихся обозначений двойного интеграла. Для большего удобства рассмотрим это определение в терминах разбиравшейся в § 1 задачи об объеме цилиндроида.

Итак, пусть снова в области G задана непрерывная функция $z=f(x, y)$, определяющая цилиндроид, объем которого следует найти. Разобьем область G на элементарные площадки уже не

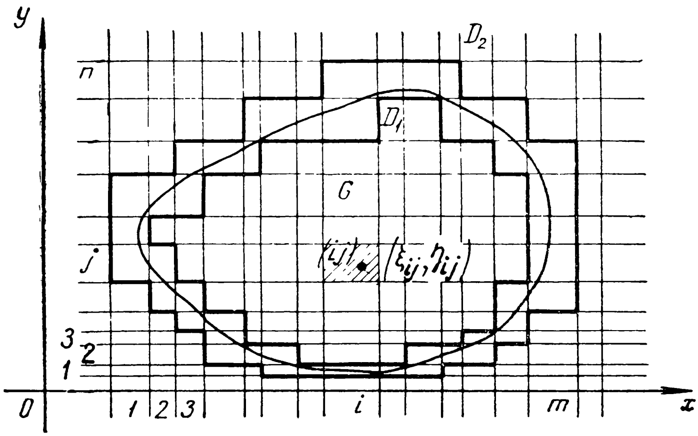


Рис. 5

произвольно, как раньше, а прямыми, параллельными координатным осям, $x=x_i$, $y=y_j$. При этом область G будет разбита на площадки двух видов — прямоугольники, лежащие строго внутри G, и их

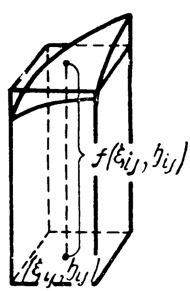


Рис. 6

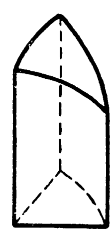


Рис. 7

части, примыкающие к границе G (рис. 5). Занумеруем полосы вдоль оси Ox номерами 1, 2, ..., i,..., m, а вдоль оси Oy — номерами 1, 2, ..., j, ..., n. Тогда каждый прямоугольник имеет пару номеров (i, j) в зависимости от номеров полос, в которых он находится.

Через прямые, делящие область G, проведем плоскости, параллельные оси Oz. Они разобьют цилиндроид на элементарные цилиндроиды двух видов: имеющие в основании прямоугольники (рис. 6) и площадки, примыкающие к границе области (рис. 7).

Чтобы найти приближенно объем цилиндроида с прямоугольным основанием, выберем в прямоугольнике (i, j) точку с координатами (ξ_{ij}, η_{ij}) и заменим элементарный цилиндроид призмой с тем же основанием и высотой $f(\xi_{ij}, \eta_{ij})$ (см. рис. 6). Тогда

$$\Delta v_{ij} \approx f(\xi_{ij}, \eta_{ij})\, \Delta x_i \Delta y_j, \tag{3}$$

так как площадь основания равна в этом случае произведению $\Delta x_i \Delta y_j$.

Выделим в области G область D_1, состоящую из всех прямоугольников, лежащих целиком внутри G (см. рис. 5). Приближенное значение объема цилиндроида можно получить, просуммировав равенства вида (3) по всем прямоугольникам области D_1, для чего следует суммировать сперва вдоль некоторой полосы, а затем складывать полосы. Таким образом, получаем

$$v = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})\, \Delta x_i \Delta y_j. \tag{4}$$

Цилиндроидами, основания которых примыкают к границе G (см. рис. 7), при построении интегральной суммы будем пренебрегать.

Другое выражение для объема цилиндроида получается, если суммировать выражения вида (3) по области D_2, состоящей из прямоугольников, лежащих внутри G или пересекающихся с границей (см. рис. 5).

Итак, мы получаем два новых вида *двойных интегральных сумм*

$$S_{m,n}^{(1)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n}{}^{(1)} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})\, \Delta x_i \Delta y_j \tag{5}$$

и

$$S_{m,n}^{(2)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n}{}^{(2)} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})\, \Delta x_i \Delta y_j. \tag{6}$$

Индекс (1) или (2) у знака суммы показывает, по какому множеству прямоугольников они строятся — по D_1 или D_2.

Двойная сумма (5), как приближенное выражение для объема цилиндроида, содержит ошибки двух родов. Прежде всего это обычная ошибка интегральной суммы, аналогичная ошибке, встречающейся при нахождении площади криволинейной трапеции и вытекающая из замены цилиндроида призмой. Из геометрических соображений следует, что для непрерывной функции такая ошибка убывает с уменьшением площади и стремится к нулю, когда прямоугольники стягиваются к точке.

Но сумма (5) подвержена также и ошибке иного рода, которая не встречалась раньше. Она состоит в том, что элементарные цилиндроиды, построенные на площадках, примыкающих к границе G, вообще не принимались во внимание. Величина этой ошибки зависит от суммы площадей прямоугольников, покрывающих границу области G. Аналогичные ошибки содержит также и интегральная сумма (6).

Двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области G может быть также определен как общий предел двойных интегральных сумм (5) и (6)

$$\iint\limits_{G} f(x, y)\, dxdy = \lim_{\substack{m,n\to\infty \\ \Delta x,\, \Delta y\to 0}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})\, \Delta x_i \Delta y_j, \tag{7}$$

где справа может стоять как сумма $S^{(1)}_{m,n}$, так и сумма $S^{(2)}_{m,n}$ Чтобы обеспечить существование такого о б щ е г о предела, необходимо, чтобы ошибка, связанная с отбрасыванием участков, примыкающих к границе, в сумме (5) или, наоборот, «вылезанием» за границу G в сумме (6), также стремилась к нулю.

Для точной формулировки такого требования удобно воспользоваться следующим определением. *Говорят, что кривая имеет нулевую площадь, если ее можно покрыть системой попарно не пересекающихся прямоугольников, сумма площадей которых меньше любого наперед заданного числа.* Простейшими примерами кривых с нулевой площадью являются *спрямляемые* кривые, т. е. кривые, имеющие определенную длину, хотя кривые с нулевой площадью не обязательно спрямляемы. *Область, граница которой имеет нулевую площадь, называется квадрируемой.*

Пользуясь введенным термином, сформулируем теперь условия интегрируемости функции в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а с у щ е с т в о в а н и я д в о й н о г о и н т е г р а л а. *Если область G квадрируема и функция $z=f(x, y)$ непрерывна на G, включая границу, то она интегрируема в этой области.* Из теоремы существования, доказательства которой мы приводить не будем, вытекает, между прочим, эквивалентность двух определений (2) и (7) для двойного интеграла.

Учитывая, что *гладкая* кривая, т. е. кривая, имеющая непрерывно вращающуюся касательную, во всяком случае имеет нулевую площадь, можно дать более простую, хотя и более узкую формулировку теоремы существования.

Если область G ограничена конечным числом гладких кривых и функция $z=f(x, y)$ непрерывна на G, включая границу, то она интегрируема в этой области.

Остановимся теперь на с в о й с т в а х д в о й н о г о и н т е г р а л а, доказательство которых аналогично доказательству свойств определенного интеграла.

1. *Постоянный множитель может быть вынесен за знак двойного интеграла*

$$\iint\limits_{G} cf(x, y)\, dxdy = c \iint\limits_{G} f(x, y)\, dxdy \quad (c = \mathrm{const}). \tag{8}$$

2. *Двойной интеграл от алгебраической суммы конечного числа интегрируемых функций существует и равен алгебраической сумме двойных интегралов от отдельных слагаемых.* Для двух слагаемых

$$\iint\limits_G [f(x, y) \pm \varphi(x, y)]\, dxdy = \iint\limits_G f(x, y)\, dxdy \pm \iint\limits_G \varphi(x, y)\, dxdy. \qquad (9)$$

3. *Если область G разбита непрерывной кривой L, имеющей нулевую площадь, на две части G_1 и G_2, то функция $f(x, y)$, интегрируемая по G, интегрируема также по обеим частям, и интеграл от нее по области G равен сумме интегралов по областям G_1 и G_2*

$$\iint\limits_G f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{G_1} f(x, y)\, dxdy + \iint\limits_{G_2} f(x, y)\, dxdy. \qquad (10)$$

4. *Если функции $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ во всех точках области G удовлетворяют неравенству $f(x, y) \geqslant \varphi(x, y)$,* то

$$\iint\limits_G f(x, y)\, dxdy \geqslant \iint\limits_G \varphi(x, y)\, dxdy. \qquad (11)$$

5. *Если интегрируемая функция равна единице, то двойной интеграл равен площади области интегрирования,*

$$\iint\limits_G dxdy = Q, \qquad (12)$$

где Q означает площадь области G.

6. *Если функция $f(x, y)$ во всех точках области G удовлетворяет неравенствам $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$, то*

$$mQ \leqslant \iint\limits_G f(x, y)\, dxdy \leqslant M\, Q, \qquad (13)$$

где Q, как и выше, означает площадь области G.

7. Теорема о среднем. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области G, включая границу, то существует точка (ξ, η), лежащая строго внутри G, и такая, что*

$$\iint\limits_G f(x, y)\, dxdy = f(\xi, \eta) Q. \qquad (14)$$

Значение $f(\xi, \eta)$, определенное равенством (14), называют *средним значением функции $f(x, y)$ в области G.*

Геометрически теорема о среднем означает, что объем цилиндроида равен объему цилиндра, построенного на области G, высота которого равна среднему значению функции.

Сравнение установленных выше свойств двойного интеграла со свойствами определенного интеграла для функций одного переменного показывает полную их аналогию. Такое совпадение не случайно: как мы увидим, оно отражает единство процесса построения определенного и двойного интегралов, так же как и других понятий интеграла, которые будут рассматриваться ниже.

Мы замечаем, что у двойного интеграла отсутствует свойство, аналогичное свойству $\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (при перемене направления интегрирования определенный интеграл изменяет знак на противоположный). Отсутствие его вполне естественно, поскольку для двойного интеграла не определено понятие направления интегрирования и область G не предполагается ориентированной. Если же ввести ориентацию области интегрирования (что бывает необходимо, например, при рассмотрении интегралов по поверхности, см. § 2, гл. III), то появляется аналог и этого свойства.

§ 3. Вычисление двойных интегралов путем сведения к повторным

Рассмотрим двойной интеграл

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dxdy = v, \tag{1}$$

геометрически выражающий, как мы уже знаем, объем цилиндроида.

Тот же объем может быть вычислен по формуле

$$v = \int\limits_a^b Q(x)\,dx, \tag{2}$$

известной нам из интегрального исчисления для функции одного переменного, где a и b означают, соответственно, наименьшую и

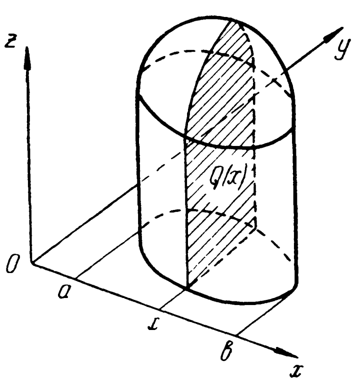


Рис. 8

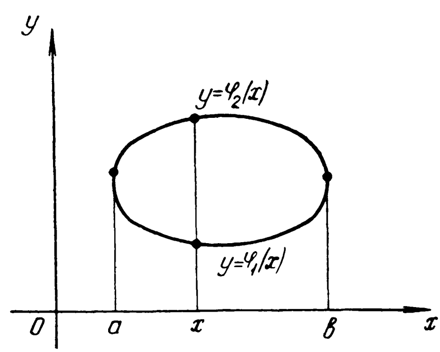


Рис. 9

наибольшую абсциссы точек цилиндроида, а $Q(x)$ — площадь его поперечного сечения плоскостью, параллельной координатной плоскости yOz с абсциссой x. Предположим, кроме того, что граница области G пересекается с любым перпендикуляром к осям Ox и Oy не более чем в двух точках (рис. 8).

Пусть кривые, ограничивающие область G сверху и снизу, задаются на отрезке $[a, b]$ уравнениями

$$y = \varphi_2(x) \text{ и } y = \varphi_1(x).$$

Поперечным сечением цилиндроида, отмеченным на рис. 8, является криволинейная трапеция, основанием которой служит отрезок $[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$ (рис. 9). Спроектировав ее на плоскость yOz, найдем, что площадь поперечного сечения выразится интегралом

$$Q(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy. \quad (3)$$

Подставив выражение (3) в формулу (2), получим выражение для объема

$$v = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy. \quad (4)$$

Выражение (4) называют повторным интегралом. Сравнение выражений (1) и (4) для объема цилиндроида приводит к формуле

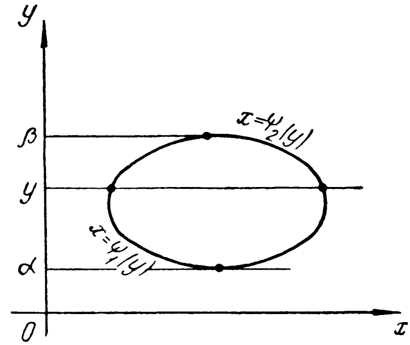


Рис. 10

$$\iint_G f(x, y)\, dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy. \quad (5)$$

Необходимо отметить, что ни формулу (1), ни формулу (2) не следует рассматривать как *определение* понятия объема. Если какую-либо из этих формул рассматривать как определение, то приведенные выше рассуждения оказались бы логически неполноценными — следовало бы предварительно доказать, что другая приводит к тому же значению объема, что и выбранная первоначально. Мы же считаем, что формулы (1) и (2) служат лишь для *нахождения величины* объема. Что касается *понятия* объема, то мы полагаем достаточными имеющиеся интуитивные представления.

Тот же двойной интеграл может быть приведен к иному повторному, если рассматривать сечения цилиндроида, перпендикулярные оси Oy. Тогда

$$v = \int_\alpha^\beta Q(y)\, dy,$$

где α и β — крайние ординаты области G. Если кривые, ограничивающие область G слева и справа, могут быть заданы уравнениями $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$ (рис. 10), то

$$Q(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx,$$

откуда

$$v = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx. \tag{6}$$

Сравнивая выражения (1) и (6) для объема цилиндроида, находим

$$\iint_G f(x, y)\, dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx, \tag{7}$$

что дает новое выражение двойного интеграла через повторный. Поскольку вычисление повторного интеграла (4) или (6) может быть проведено с помощью аппарата интегрального исчисления, вопрос о вычислении двойных интегралов можно считать решенным.

Сравнивая формулы (5) и (7), получим равенство двух повторных интегралов

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx,$$

которое означает *перемену порядка интегрирования* в повторном интеграле. Последнее является хорошим упражнением при *расстановке пределов* в двойном интеграле, т. е. при сведении двойного интеграла к повторному.

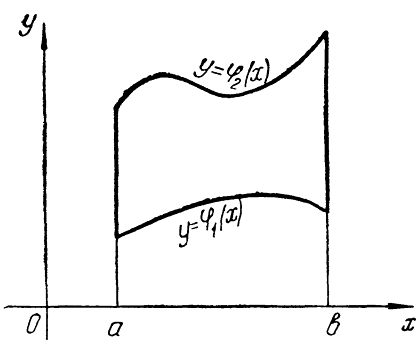


Рис. 11

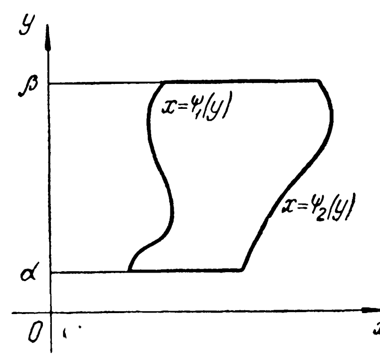


Рис. 12

Формулы (5) и (7) справедливы и в более общем случае. Для применимости формулы (5) достаточно, чтобы граница области пересекалась перпендикулярами лишь к оси Ox не более чем в двух точках, т. е. можно рассматривать область, ограниченную кривыми $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$ и отрезками прямых $x=a$, $x=b$ (рис. 11). Для формулы (7) область может быть ограничена отрезками прямых $y=\alpha$, $y=\beta$ и кривыми $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$, т. е. ее граница пересекается перпендикулярами к оси Oy не более чем в двух точках (рис. 12).

Если область G ограничена более сложными кривыми, то двойной интеграл (1) следует, пользуясь свойством 3 (см. § 2), разбить на сумму интегралов по более простым областям, а затем каждый из них сводить к повторному отдельно. При этом может случиться, что перемена порядка интегрирования сводит один повторный интеграл к нескольким или наоборот.

Приведем примеры расстановки пределов и вычисления двойных интегралов.

Для расстановки пределов необходимо прежде всего построить область интегрирования и выбрать направление внутреннего и внешнего интегрирования. Внутреннее интегрирование производится *от линии до линии,* поэтому пределы внутреннего интеграла находятся из уравнений линий, ограничивающих область интегрирования. Внешнее интегрирование производится *от точки до точки,* так что пределами внешнего интеграла служат координаты крайних точек области.

Пример 1. Найти пределы интегрирования для интеграла $\iint\limits_G f(x, y)\,dxdy$, если область G характеризуется неравенствами $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$, т. е. привести этот двойной интеграл к повторному.

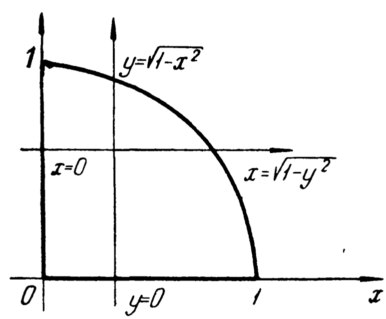


Рис. 13

Заменив данные в условии неравенства равенствами, получим уравнения линий, ограничивающих область. Это будут $x=0$, $y=0$, $x^2+y^2=1$. Отсюда и из неравенств, следует, что область G представляет четверть единичного круга, лежащую в первом квадранте (рис. 13). Выбор порядка интегрирования здесь безразличен. Если интегрировать сперва по y, а затем по x, то внутреннее интегрирование производится от оси Ox до окружности, уравнение которой

$$y = \sqrt{1-x^2},$$

а внешнее — от $x=0$ до $x=1$. Поэтому

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy.$$

Если же внутреннее интегрирование производится по x, то его придется вести от оси Oy до окружности, уравнение которой запишется теперь

$$x = \sqrt{1-y^2}$$

и тот же двойной интеграл выразится повторным

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx.$$

Пример 2. Привести к повторному интегралу двойной интеграл $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$, если область G определяется неравенствами $x + y \leqslant 2$, $x^2 + y^2 \leqslant 2x$, $y \geqslant 0$.

Линии, ограничивающие область G, имеют уравнения $x+y=2$ (прямая), $x^2+y^2=2x$ (окружность радиуса 1 с центром в точке $(1,0)$, $y=0$ (ось Ox). Вид области показан на рис. 14, откуда следует, что более удобно производить внутреннее интегрирование по x. В этом случае

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x, y)\,dx.$$

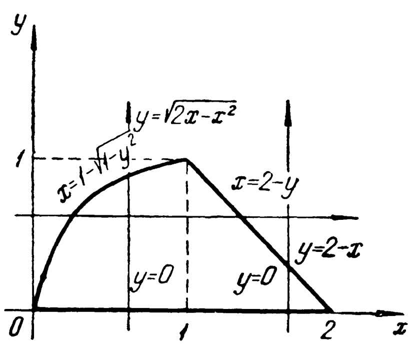


Рис. 14

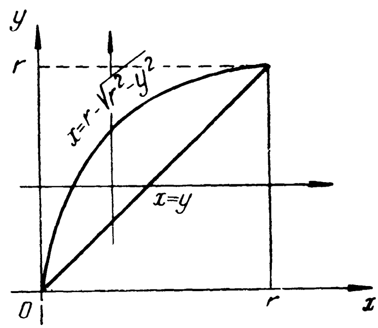


Рис. 15

Если же интегрировать сперва по y, а лишь затем по x, то область G придется разбить на две части, после чего находим

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x, y)\,dy.$$

Пример 3. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int\limits_0^r dx \int\limits_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x, y)\,dy.$$

В этом случае область интегрирования ограничена линиями $y = x$ и $y=\sqrt{2rx-x^2}$, т. е. $(x-r)^2+y^2=r^2$ (рис. 15). Поэтому

$$\int\limits_0^r dx \int\limits_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x, y)\,dy = \int\limits_0^r dy \int\limits_{r-\sqrt{r^2-y^2}}^{y} f(x, y)\,dx.$$

Пример 4. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G (x+y)\,dx\,dy$ по области G, ограниченной линиями $x = y$, $x = y^2$.

Область интегрирования изображена на рис. 16. Интегрируя сперва по y, а затем по x, получаем

$$\iint\limits_G (x+y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{\sqrt{x}} (x+y)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{y=x}^{y=\sqrt{x}} dx = \int\limits_0^1 \left[\left(x\sqrt{x} + \frac{x}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(x^2 + \frac{x^2}{2}\right)\right] dx = \frac{2}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{20}.$$

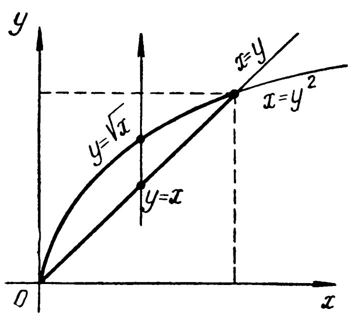


Рис. 16

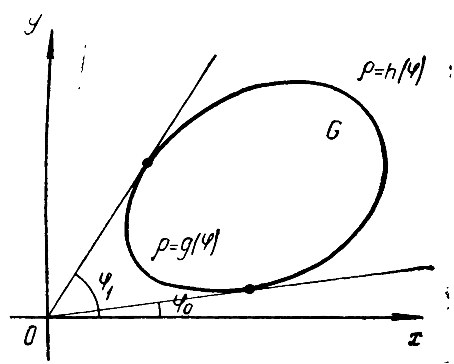


Рис. 17

§ 4. Двойной интеграл в полярных координатах

Настоящий параграф посвящен преобразованию двойного интеграла $\iint\limits_G f(x, y)\,dxdy$, взятого по области G, к полярным координатам, которое весьма часто оказывается полезным.

Предположим, как обычно, что полярная ось совпадает с осью абсцисс и полюс лежит в начале координат. Пусть вся область G лежит между лучами $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_1$, граница области пересекается любым лучом, заключенным между данными, строго в двух точках, и уравнения кривых, ограничивающих область, имеют вид $\rho = g(\varphi)$, $\rho = h(\varphi)$ (рис. 17).

Пользуясь теоремой существования, мы можем для нахождения двойного интеграла разбивать область любым способом и выбирать на каждой элементарной площадке точки (ξ, η) как угодно. При рассмотрении полярных координат удобно разбивать область G

координатными линиями полярной системы, т. е. лучами $\varphi = \varphi_i$ и окружностями $\rho = \rho_j$. Разбиение будет иметь вид, показанный на рис. 18. Как и в случае декартовых координат, при разбиении получаются элементарные площадки двух видов: лежащие целиком внутри области G участки круговых колец и части таких участков, примыкающие к границе области.

Занумеровав полосы, расположенные вдоль лучей и вдоль окружностей, как это показано на рис. 18, припишем каждому такому участку пару номеров (i, j). Для составления двойной интегральной суммы вычислим площадь элементарной площадки. Обозначим через ρ_j внутренний радиус кольца, $\Delta\rho_j$ — его приращение и $\Delta\varphi_i$ — центральный угол. Тогда площадь элементарной площадки найдем как разность площадей двух секторов

$$\Delta\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(\rho_j + \Delta\rho_j)^2\,\Delta\varphi_i - \frac{1}{2}\rho_j^2\Delta\varphi_i = \left(\rho_j + \frac{1}{2}\Delta\rho_j\right)\Delta\rho_j\Delta\varphi_i$$

или, принимая $\rho_j + \dfrac{1}{2}\Delta\rho_j = \rho_j^*$, получим

$$\Delta\sigma_{ij} = \rho_j^*\,\Delta\rho_j\Delta\varphi_i. \tag{1}$$

Выберем теперь на каждой элементарной площадке (i, j) точку (ξ, η) таким образом, чтобы все точки из кольца находились на одинаковом расстоянии ρ_j^* от полюса. В этом случае двойную интегральную сумму можно, с учетом равенства (1), написать в виде

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\rho_j^*\cos\varphi_{ij},\quad \rho_j^*\sin\varphi_{ij})\,\rho_j^*\,\Delta\rho_j\Delta\varphi_i. \tag{2}$$

При этом в интегральной сумме (2) суммирование распространяется на элементарные площадки, целиком помещающиеся внутри G, т. е. на область, граница которой отмечена на рис. 18 жирной чертой.

Переходя к пределу интегральных сумм (2), мы получим для двойного интеграла выражение

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_G f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho d\rho d\varphi, \tag{3}$$

или, пользуясь сделанными в начале параграфа предположениями о границе области, сразу в форме повторного интеграла

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dxdy = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi \int\limits_{g(\varphi)}^{h(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho d\rho. \tag{4}$$

Равенство (4) дает возможность вычислять двойной интеграл в полярных координатах.

Таким образом, *при переходе к полярным координатам в двойном интеграле следует в функции, стоящей под знаком интеграла, заменить x и y их выражениями через полярные координаты*

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$

а произведение $dxdy$ заменить произведением $\rho d\rho d\varphi$.

Произведение $\rho d\rho d\varphi$ называют ***элементом площади в полярных координатах.***

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dy$ с помощью перехода к полярным координатам.

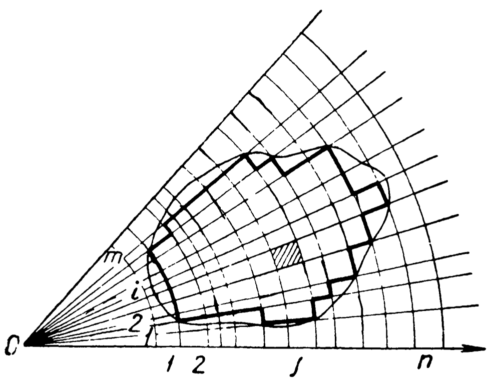


Рис 18

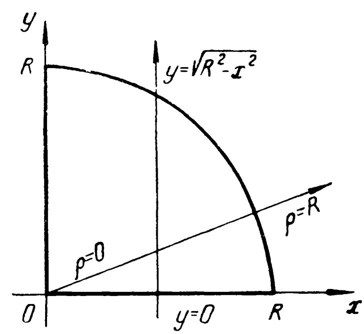


Рис. 19

Как видно из рис. 19, область имеет вид четверти круга, лежащей в первом квадранте. Можно принять $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $g(\varphi) = 0$, $h(\varphi) = R$. Поэтому равенство (4) дает

$$\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R \ln(1+\rho^2)\,\rho d\rho.$$

Внутрений интеграл вычисляем интегрированием по частям, полагая

$$\ln(1+\rho^2) = u, \quad \rho d\rho = dv,$$

откуда $du = \frac{2\rho d\rho}{1+\rho^2}$, $v = \frac{1}{2}\rho^2$; следовательно,

$$\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left[\frac{1}{2}\rho^2 \ln(1+\rho^2) \right]_0^R - \int_0^R \frac{\rho^3 d\rho}{1+\rho^2} \right\} d\varphi.$$

Дальнейшие вычисления дают

$$\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{2} R^2 \ln(1+R^2) - \right.$$

$$\left. - \int_0^R \left(\rho - \frac{\rho}{1+\rho^2} \right) d\rho \right\} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{2} R^2 \ln(1+R^2) - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{2}\ln(1+\rho^2) \right]_0^R \right\} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{2} R^2 \ln(1+R^2) - \frac{1}{2} R^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\ln(1+R^2) \right\} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(1+R^2)\ln(1+R^2) - R^2]\,d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{4} [(1+R^2)\ln(1+R^2) - R^2].$$

§ 5. Отображения плоских областей*

Пусть G — некоторая область плоскости xOy, в которой определены две однозначные и непрерывные функции двух переменных

$$\begin{aligned} u &= u(x, y), \\ v &= v(x, y). \end{aligned} \tag{1}$$

Будем рассматривать пару чисел u, v как декартовы координаты точек другой плоскости uO_1v. В таком случае можно сказать, что пара функций (1) ставит в соответствие каждой точке области G

* Только для факультета № 4.

некоторую точку плоскости uO_1v, т. е. определяет *отображение* области G плоскости xOy на плоскость uO_1v. Множество D всех точек плоскости uO_1v, в которые отображаются точки G, называют при этом *образом* области G (рис. 20).

Разрешив, если это возможно, равенство (1) относительно x и y, определим *обратное отображение*

$$\begin{aligned} x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v), \end{aligned} \tag{2}$$

отображающее образ D области G на плоскости uO_1v снова на область G плоскости xOy. Если при этом функции (2) однозначны и

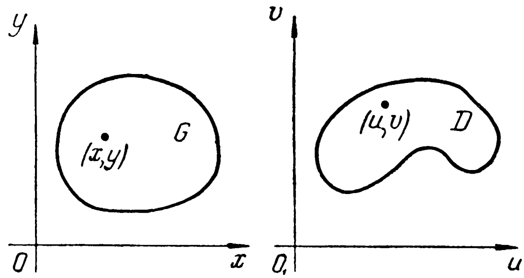


Рис. 20

непрерывны, то отображение, осуществляемое функциями (1), называют *взаимно однозначным* и *взаимно непрерывным*. Более подробно, взаимная однозначность отображения означает, что каждой точке области ставится в соответствие единственная точка образа и наоборот.

Кривая в области G перейдет при отображении в кривую в области D, причем уравнения (1) позволяют получить уравнения образа кривой в D. Это дает возможность выяснить и вид образа D области G при данном отображении.

Часто бывает полезно рассматривать *отображение плоскости на себя*, предполагая, что плоскости xOy и uO_1v совмещены.

Задание пары значений u, v из области D в случае взаимно однозначного отображения определяет некоторую точку (x, y) области G. Поэтому пару чисел u, v можно принимать за координаты точек области G. Линии, вдоль которых одна из переменных u или v сохраняет постоянное значение, называют *координатными линиями*. Так как эти координатные линии, вообще говоря, являются кривыми, то числа u, v, определяющие положение точки области G на плоскости xOy, называют *криволинейными координатами* точки.

Простейшим примером криволинейных координат являются известные *полярные координаты* ρ, φ, связанные с декартовыми известными соотношениями

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

которые являются частным случаем соотношений (2). Геометрический смысл ρ, φ не требует напоминания. Координатными линиями для этой системы являются лучи φ-const и концентрические окружности с центром в начале координат ρ-const.

§ 6. Замена переменных в двойном интеграле. Общий случай*

Пусть область G плоскости xOy отображается в область D плоскости uO_1v (рис. 20) с помощью пары функций

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \tag{1}$$

допускающих обращение

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v). \tag{2}$$

Представим двойной интеграл по области G

$$\iint_G f(x, y)\, dxdy \tag{3}$$

в виде двойного интеграла, распространенного по области D плоскости uO_1v. Тем самым будет решена задача замены переменных в двойном интеграле для случая произвольного отображения.

Будем считать u, v криволинейными координатами точек области G и разобьем эту область на элементарные площадки с помощью координатных линий. В результате этого область D разобьется прямыми, параллельными координатным осям Ox, Oy (рис. 21).

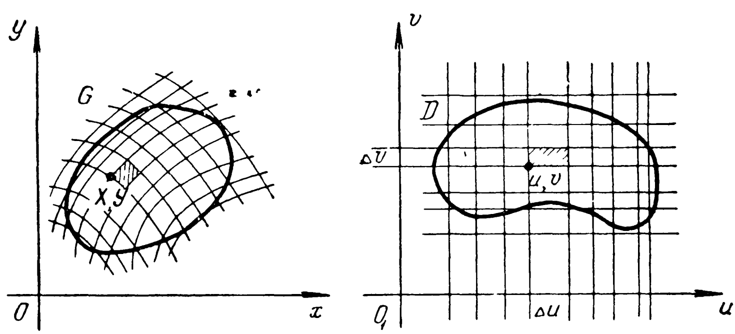


Рис. 21

Пусть u, v — координаты одной из вершин элементарного прямоугольника области D (на рис. 21 заштрихован), стороны которого суть Δu и Δv, а площадь $\Delta u \Delta v$. Отображение (2) переводит этот прямоугольник в криволинейный четырехугольник области G (на рис. 21 также заштрихован), площадь которого $\Delta \sigma$ мы хотим подсчитать.

---

* Только для факультета № 4.

С точностью до бесконечно малых высших порядков этот криволинейный четырехугольник можно считать параллелограммом, вершины которого являются образами вершин прямоугольника, координаты которых (u, v), $(u+\Delta u, v)$, $(u, v+\Delta v)$, $(u+\Delta u, v+\Delta v)$. Площадь же параллелограмма можно вычислить как удвоенную площадь треугольника с вершинами (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2), где

$$x = x(u, v); \quad x_1 = x(u+\Delta u, v); \quad x_2 = x(u, v+\Delta v);$$
$$y = y(u, v); \quad y_1 = y(u+\Delta u, v); \quad y_2 = y(u, v+\Delta v).$$

Таким образом,

$$\Delta\sigma = \begin{vmatrix} x_1 - x & x_2 - x \\ y_1 - y & y_2 - y \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Подсчитаем координаты точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Предположим, что функции (2) дифференцируемы. Тогда с точностью до бесконечно малых высших порядков имеют место равенства

$$x_1 = x(u+\Delta u, v) = x(u, v) + \frac{\partial x(u, v)}{\partial u}\Delta u,$$

$$x_2 = x(u, v+\Delta v) = x(u, v) + \frac{\partial x(u, v)}{\partial v}\Delta v,$$

$$y_1 = y(u+\Delta u, v) = y(u, v) + \frac{\partial y(u, v)}{\partial u}\Delta u,$$

$$y_2 = y(u, v+\Delta v) = y(u, v) + \frac{\partial y(u, v)}{\partial v}\Delta v.$$

Подставив полученные значения координат вершин в равенство (4), найдем

$$\Delta\sigma = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \Delta u \Delta v. \tag{5}$$

Определитель второго порядка, встретившийся в равенстве (5), играет важную роль в теории функций нескольких переменных. Его называют *якобианом** системы функций (2) и обозначают

* Название связано с фамилией известного немецкого математика К. Якоби (1804—1851), изучавшего свойства этих определителей. Впервые такие определители рассматривал выдающийся русский математик академик М. В. Остроградский (1801—1861), работы которого в этой области остались неопубликованными.

символом $\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}$,

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Так как якобиан может оказаться и отрицательным, то для точного выполнения равенства (5) в нем следует брать абсолютную величину якобиана, т. е.

$$\Delta\sigma = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| \Delta u \Delta v. \tag{6}$$

Равенство (6) показывает, что *якобиан играет роль коэффициента растяжения площади при отображении* (2), так как он равен (с точностью до бесконечно малых высших порядков, исчезающих при переходе к пределу, когда прямоугольник стягивается в точку) отношению площади $\Delta\sigma$ образа элементарного прямоугольника к площади $\Delta u \Delta v$ самого прямоугольника.

Это свойство якобиана показывает его аналогию с производной функции одной переменной, которая может вследствие равенства $dy = f'(x)dx$ рассматриваться как коэффициент растяжения элементарного отрезка dx. Указанная аналогия еще более подкрепляется правилом, аналогичным правилу дифференцирования сложной функции: если $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ и $u = u(\xi, \eta)$, $v = v(\xi, \eta)$, то

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(\xi, \eta)}. \tag{7}$$

Доказательство можно получить, вычислив производные якобиана $\dfrac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}$ по правилу дифференцирования сложной функции и перемножив определители в правой части равенства (7), что без труда можно выполнить самостоятельно

Без больших затруднений можно было бы также показать, что и знак якобиана имеет геометрический смысл. Именно, положительность якобиана означает, что данное отображение *сохраняет ориентацию*. При отрицательном якобиане, наоборот, отображение *изменяет ориентацию, т. е.* замкнутый контур, который в области D обходится против часовой стрелки, отображается на контур в области G, имеющий обход по часовой стрелке.

Просуммировав равенства вида (6) для всех элементарных площадок области G и перейдя к пределу, получим формулу для площади области G

$$Q = \iint\limits_{D} \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv. \tag{8}$$

Равенство (6) может быть использовано также и для решения основной задачи, которая была поставлена в начале настоящего параграфа, — замены переменных в двойном интеграле. Для этого составим интегральную сумму для интеграла (3) по уже рассмотренному разбиению области и с произвольно выбранными точками (ξ, η). Тогда, вследствие (6),

$$\sum_k f(x_k, y_k)\Delta\sigma_k =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\{x(u_{ij}, v_{ij}), y(u_{ij}, v_{ij})\} \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right|_{\substack{u\\v}} \Delta u_i \Delta v_j.$$

Переход к пределу дает нужную формулу замены переменных в двойном интеграле

$$\iint_G f(x, y)\,dxdy = \iint_D f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| dudv. \qquad (9)$$

Таким образом, *если $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, причем u, v изменяются в области D, то для замены переменных в двойном интеграле следует заменить переменные x, y их выражениями через u, v, произведение $dxdy$ заменить произведением $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\,du\,dv$, а область интегрирования G — областью D.*

Заметим, что выведенная в § 4 формула перехода к полярным координатам является частным случаем формулы (9). Действительно, при переходе к полярным координатам якобиан равен

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

§ 7. Геометрические приложения двойного интеграла

Применение двойных интегралов при нахождении площадей и объемов было достаточно подробно разъяснено ранее, поэтому мы перейдем к рассмотрению примеров.

Пример 1. Вычислить площадь, ограниченную эллипсом

$$(y - x)^2 + x^2 = 1.$$

Разрешая уравнение эллипса относительно y, найдем

$$y = x \pm \sqrt{1 - x^2},$$

откуда следует, что эллипс расположен над участком $-1 \leqslant x \leqslant 1$ (рис. 22). Поэтому

$$Q = \int_{-1}^{1} dx \int_{x-\sqrt{1-x^2}}^{x+\sqrt{1-x^2}} dy = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\,dx = [x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x]_{-1}^{1} = \pi.$$

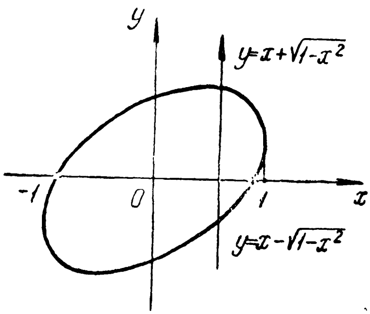


Рис. 22

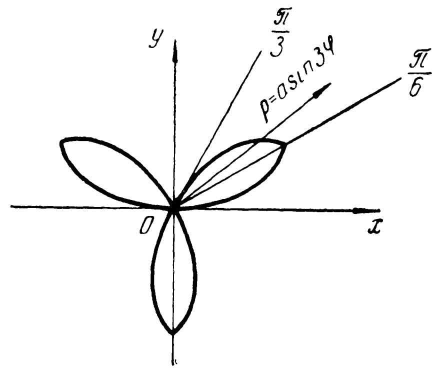


Рис. 23

Пример 2. Найти площадь одной петли трехлепестковой розы $\rho = a\sin 3\varphi$ (рис. 23). Первый лепесток расположен в секторе $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}$. Поэтому

$$Q = \iint_G \rho d\rho d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{a\sin 3\varphi} \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\rho^2 \Big|_{\rho=0}^{\rho=a\sin 3\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} a^2 \sin^2 3\varphi d\varphi = \frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos 6\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{4}\left[\varphi - \frac{1}{6}\sin 6\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi a^2}{12}.$$

Пример 3. Найти объем тела, ограниченного цилиндрическими поверхностями $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ и плоскостями $z = 0$ и $x+z=6$ (рис. 24).

Плоскость $z=6-x$, ограничивающая тело сверху, пересекает плоскость xOy по прямой $x=6$. Областью интегрирования служит область между двумя параболами, изображенная на рис. 24 справа. Производя внутреннее интегрирование по y, находим

$$v=\iint_G (6-x)\,dxdy=\int_0^6 dx\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(6-x)dy=\int_0^6 (6-x)\,y\Big|_{y=\sqrt{x}}^{y=2\sqrt{x}}dx=$$

$$=\int_0^6 (6\sqrt{x}-x\sqrt{x})\,dx=\left[4x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^6=\frac{48\sqrt{6}}{5}\approx 23{,}5.$$

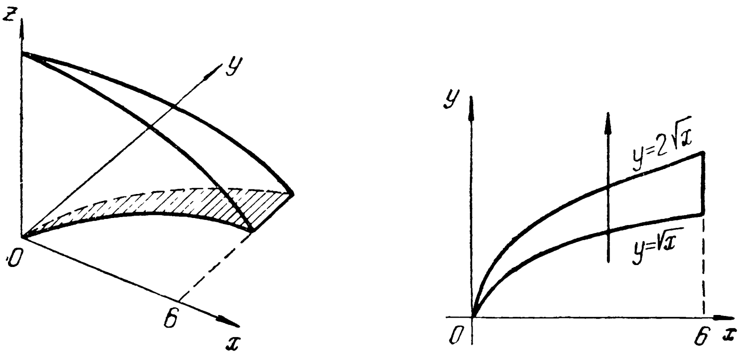


Рис. 24

Пример 4. Найти объем тела, ограниченного цилиндрическими поверхностями $z=4-y^2$, $y=\dfrac{x^2}{2}$ и плоскостью $z=0$.

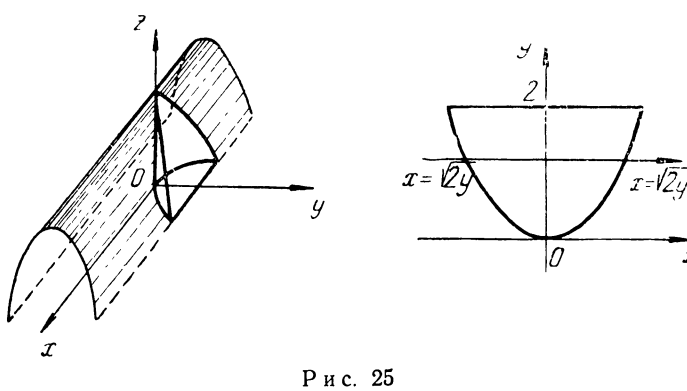


Рис. 25

Как видно из рис. 25, поверхность, ограничивающая тело сверху, имеет уравнение $z=4-y^2$. Область интегрирования, изображенная на рис. 25 справа отдельно, получается пересечением параболы $y=\frac{x^2}{2}$ на плоскостью xOy слинией $y=2$ пересечения цилиндра $z=4-y^2$ и плоскостью $z=0$. Искомый объем тела равен

$$v=\iint\limits_G (4-y^2)\,dx\,dy=\int\limits_0^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2y}}^{+\sqrt{2y}} (4-y^2)\,dx=$$

$$=\int\limits_0^2 (4-y^2)\,x\Big|_{x=-\sqrt{2y}}^{x=+\sqrt{2y}} dy=2\int\limits_0^2\left(4\sqrt{2}y^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}y^{\frac{5}{2}}\right)dy=$$

$$=\left[\frac{16\sqrt{2}}{3}y^{\frac{3}{2}}-\frac{4\sqrt{2}}{7}y^{\frac{7}{2}}\right]_0^2=\frac{256}{21}\approx 12{,}2.$$

Пример 5. Найти объем тела, вырезанного из шара радиуса R прямым круговым цилиндром радиуса $\frac{1}{2}R$, одна из образующих которого проходит через центр шара.

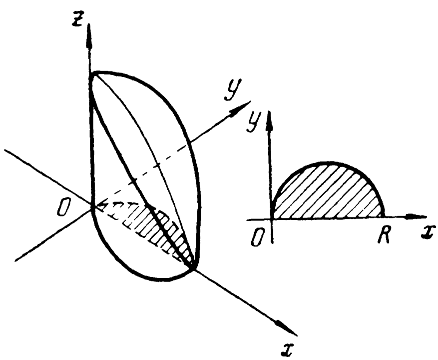


Рис. 26

Пусть центр шара лежит в начале координат, так что уравнение поверхности сферы

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Ось цилиндра можно предположить смещенной по оси Ox, поэтому уравнение его поверхности

$$\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{R}{2}\right)^2$$

или

$$x^2+y^2=Rx.$$

На рис. 26 изображена половина этого тела, расположенная над плоскостью xOy. Симметрия тела относительно этой плоскости очевидна. Более того, тело симметрично также и относительно плоскости xOz, поэтому можно вычислять интегрированием лишь четверть объема, принимая за область интегрирования полукруг, изображенный на рис. 26 справа отдельно. Мы видим, что

$$v=4\iint\limits_G \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

где G означает указанный полукруг.

Для вычисления двойного интеграла удобно воспользоваться полярными координатами. Подставив $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ в уравнение границы области интегрирования $x^2+y^2=Rx$, найдем $\rho^2=R\rho\cos\varphi$ или $\rho=R\cos\varphi$. Из рис 26 легко находим, что $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, вследствие чего имеем

$$v=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho d\rho.$$

Дальнейшие вычисления дают

$$v=-\frac{4}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=R\cos\varphi} d\varphi=\frac{4}{3}R^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-(1-\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}\right]d\varphi=$$

$$=\frac{4}{3}R^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\varphi)\,d\varphi=\frac{4}{3}R^3\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{4}{3}R^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\varphi)\sin\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{2}{3}\pi R^3+\frac{4}{3}R^3\left[\cos\varphi-\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}R^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right).$$

Рассмотренную нами задачу часто называют *задачей Вивиани* по имени итальянского математика XVII века, впервые ее рассматривавшего. Любопытно отметить, что разность между объемом полусферы, расположенной в сторону положительных абсцисс от плоскости yOz и содержащей рассмотренное нами тело, и самим этим телом имеет объем, равный

$$v_1=\frac{2}{3}\pi R^3-v=\frac{2}{3}\pi R^3-\frac{2}{3}R^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{9}R^3,$$

который *рационально выражается через радиус шара.*

Пример 6. Найти объем тела, ограниченного плоскостью $z=x+y$, цилиндрическими поверхностями $xy=1$, $xy=2$ и плоскостями $y=x$, $y=2x$, $z=0$ $(x>0,\ y>0)$.

Ясно, что тело ограничено сверху плоскостью $z=x+y$, так что его объем равен

$$v=\iint\limits_G (x+y)\,dxdy,$$

где область G ограничена двумя гиперболами и двумя прямыми, изображенными на рис. 27. Для удобства вычисления интеграла произведем замену переменных, определив новые переменные u, v равенствами

$$xy=u, \quad y=vx,$$

или

$$x=\sqrt{\frac{u}{v}}, \quad y=\sqrt{uv}.$$

В таком случае область G будет образом квадрата $1\leqslant u\leqslant 2$, $1\leqslant v\leqslant 2$. Вычислим якобиан этого отображения. Частные производные равны

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда находим

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix}=\frac{1}{2v}.$$

Таким образом, объем тела выразится интегралом

$$v=\int_1^2 du\int_1^2\left(\sqrt{\frac{u}{v}}+\sqrt{uv}\right)\frac{dv}{2v}=\frac{1}{2}\int_1^2 du\int_1^2\left(\sqrt{\frac{u}{v^3}}+\sqrt{\frac{u}{v}}\right)dv=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2\sqrt{u}\left[-\frac{2}{\sqrt{v}}+2\sqrt{v}\right]_{v=1}^{v=2}du=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^2\sqrt{u}\,du=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2=\frac{\sqrt{2}}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

Двойной интеграл может быть использован также для вычисления площади поверхности. Если поверхность задана явным уравнением $z=f(x, y)$ над областью G, то площадь этой поверхности выразится интегралом

$$S=\iint_G\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy,$$

где $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ — обозначения Монжа для частных производных. Эту формулу мы приводим без вывода *. Рассмотрим примеры вычисления площади поверхности.

Пример 7. Найти площадь части поверхности $z = \frac{2}{3}(x\sqrt{x} + y\sqrt{y})$, расположенной над квадратом $0 \leqslant x, y \leqslant 1$ (рис. 28).

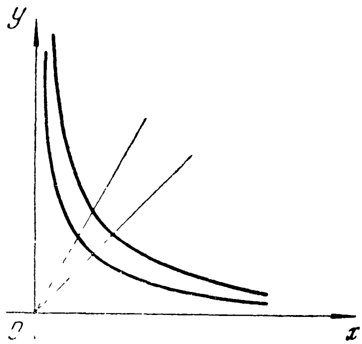


Рис 27

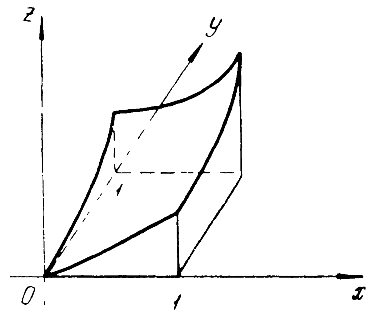


Рис. 28

Здесь $p = \sqrt{x}$, $q = \sqrt{y}$. Поэтому площадь части поверхности выразится интегралом

$$S = \iint_G \sqrt{1 + x + y}\, dxdy,$$

или, так как область G есть единичный квадрат,

$$S = \int_0^1 dx \int_0^1 \sqrt{1 + x + y}\, dy.$$

Вычисления дают

$$S = \int_0^1 \frac{2}{3}(1 + x + y)^{\frac{3}{2}} \Big|_{y=0}^{y=1} dx = \frac{2}{3}\int_0^1 [(x+2)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{3}{2}}]\, dx =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}[(x+2)^{\frac{5}{2}} - (x+1)^{\frac{5}{2}}]_0^1 = \frac{4}{15}(3^{\frac{5}{2}} - 2^{\frac{5}{2}} - 2^{\frac{5}{2}} + 1) \approx 1{,}41.$$

Пример 8. Найти часть поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, вырезанной цилиндром $\left(x - \frac{1}{2}R\right)^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$.

* В программе факультета № 4 предусмотрен вывод более общей формулы для случая поверхности, заданной параметрически, в разделе «Дифференциальная геометрия»

Эта поверхность ограничивает сверху *тело Вивиани,* объем которого был вычислен выше в примере 5 (см. рис. 26). Поскольку область интегрирования там была уже выяснена, найдем сразу частные производные. Здесь

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},\quad p=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\qquad q=-\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

так что

$$S=2\iint\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{R^2-x^2-y^2}}\,dxdy=2\iint\limits_G\frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Переходя к полярным координатам, найдем

$$S=2R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{R\cos\varphi}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=2R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\sqrt{R^2-\rho^2}\,\right]_{\rho=0}^{\rho=R\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=2R^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi)\,d\varphi=2R^2\,[\varphi+\cos\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}}=2R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

Любопытно отметить, что поверхность тела Вивиани, общая с поверхностью шара, составляет $2S=2R^2(\pi-2)$. Поэтому часть поверхности полусферы, оставшаяся после удаления из нее тела Вивиани, равна $2\pi R^2\ \ 2R^2(\pi-2)=4R^2$, т.е. снова *рационально выражается через радиус шара, как и объем.*

§ 8. Некоторые применения двойных интегралов в механике

В настоящем параграфе будут рассмотрены задачи механики, решение которых требует применения понятия двойного интеграла. Одна из таких задач уже рассматривалась выше — задача о нахождении массы неоднородного диска (см. § 1, задача 2). Как следует из рассуждений § 1, масса неоднородного диска выражается формулой

$$m=\iint\limits_G\rho(x,\,y)\,dxdy,\tag{1}$$

где ρ — поверхностная плотность диска, т. е. масса, отнесенная к единице площади.

Перейдем теперь к следующим задачам.

Задача 1. *Статический момент плоской области относительно координатных осей.* Как известно из механики, статическим моментом материальной точки относительно оси называется произведение ее массы на расстояние до данной оси.

Пусть имеется плоский диск, толщиной которого можно пренебрегать, так что его можно рассматривать как область G плоскости xOy, и известна поверхностная плотность этого диска $\rho = \rho\ (x,\ y)$ как функция точки области G. Определим статические моменты этого диска относительно координатных осей.

Разобьем область G на элементарные площадки и рассмотрим одну из них (на рис. 29 заштрихована), площадь которой равна $\Delta x \Delta y$. Выбрав на ней произвольную точку $(x,\ y)$, можем считать приближенно, что вся масса площадки сосредоточена в этой точке. Так как расстояние этой точки до оси Ox равно y, а расстояние до оси Oy равно x, то ее статические моменты относительно координатных осей будут равны, соответственно,

$$\Delta M_x = y\Delta m, \quad \Delta M_y = x\,\Delta m,$$

где Δm означает массу элементарной площадки.

В свою очередь, массу элементарной площадки следует считать приближенно равной произведению плотности в точке $(x,\ y)$ на площадь $\Delta m = \rho(x,\ y)\,\Delta x\,\Delta y$, так что

$$\Delta M_x = y\,\rho(x,\ y)\,\Delta x\,\Delta y,$$

$$\Delta M_y = x\,\rho(x,\ y)\,\Delta x\,\Delta y. \qquad (2)$$

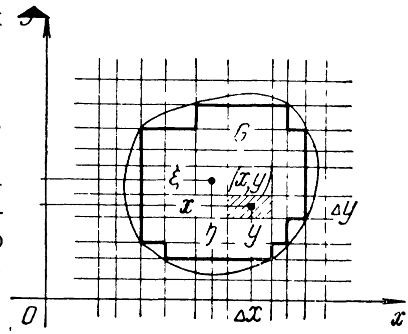


Рис. 29

Просуммировав выражения вида (2) по всем элементарным площадкам, лежащим строго внутри области G, и затем перейдя к пределу, получим для статических моментов относительно координатных осей формулы

$$M_x = \iint\limits_G y\,\rho\,(x,\ y)\,dxdy, \qquad (3)$$

$$M_y = \iint\limits_G x\,\rho\,(x,\ y)\,dxdy. \qquad (4)$$

Если, в частности, диск окажется однородным, то его плотность постоянна и множитель ρ в формулах (3) и (4) может быть вынесен за знак двойного интеграла.

Задача 2. *Координаты центра тяжести плоской фигуры.* Рассмотрим тот же диск, что и в предыдущей задаче, и определим координаты его центра тяжести.

Воспользуемся известным свойством центра тяжести — если в центр тяжести фигуры поместить массу, равную массе всей фигуры, то статические моменты относительной любой оси останутся без изменения. Пусть $(\xi,\ \eta)$ — координаты центра тяжести области G (см. рис. 29) и m — ее масса. Тогда

$$M_x = \eta\, m, \quad M_y = \xi m.$$

Сравнив полученные выражения с формулами (3) и (4) для статических моментов, найдем

$$\xi=\frac{1}{m}\iint\limits_G x\rho(x, y)\,dxdy, \quad \eta=\frac{1}{m}\iint\limits_G y\rho(x, y)\,dxdy.$$

Воспользовавшись для массы приведенной выше формулой (1), получим для координат центра тяжести выражение

$$\xi=\frac{\iint\limits_G x\rho(x, y)\,dxdy}{\iint\limits_G \rho(x, y)\,dxdy}; \quad \eta=\frac{\iint\limits_G y\rho(x, y)\,dxdy}{\iint\limits_G \rho(x, y)\,dxdy}. \tag{5}$$

Для однородного диска постоянная плотность ρ может быть вынесена за знак интеграла и в числителе и в знаменателе. Поэтому ее можно сократить, а так как оставшийся интеграл равен площади области G, то формулы для координат центра тяжести *однородного* диска будут иметь вид

$$\xi=\frac{\iint\limits_G xdxdy}{Q}, \quad \eta=\frac{\iint\limits_G ydxdy}{Q}. \tag{6}$$

Задача 3. *Момент инерции плоской фигуры относительно координатных осей.* Рассмотрим снова тот же плоский диск и определим его моменты инерции относительно координатных осей.

Момент инерции играет роль массы в уравнениях, относящихся к вращательному движению, поэтому его иногда называют *вращательной массой;* известно, что моментом инерции материальной точки относительно данной оси называется произведение квадрата расстояния точки до оси на ее массу.

Разобьем снова область G на элементарные площадки (см. рис. 29) и подсчитаем для одной из них моменты инерции относительно координатных осей, принимая ее за материальную точку. Получим

$$\Delta I_x=y^2\,\Delta m=y^2\rho(x, y)\,\Delta x\,\Delta y; \quad \Delta I_y=x^2\,\Delta m=x^2\rho(x, y)\,\Delta x\,\Delta y.$$

Суммирование по элементарным площадкам и переход к пределу дают

$$I_x=\iint\limits_G y^2\rho(x, y)\,dxdy, \tag{7}$$

$$I_y=\iint\limits_G x^2\rho(x, y)\,dxdy. \tag{8}$$

Как и выше, для однородного диска постоянную плотность ρ можно в формулах (7) и (8) выносить за знак двойного интеграла. Часто рассматриваются также «геометрические моменты», в которых принимается $\rho=1$.

Рассмотрим теперь некоторые примеры применения выведенных формул.

Пример 1. Вычислить статические моменты* относительно координатных осей и координаты центра тяжести фигуры, ограниченной синусоидой $y=\sin x$ и прямой, проходящей через начало координат и вершину $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ синусоиды (рис. 30).

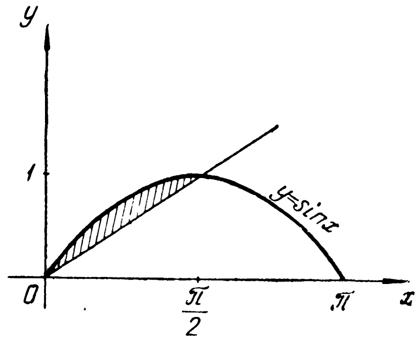


Рис. 30

Уравнение прямой, очевидно, имеет вид $y=\frac{2x}{\pi}$. Статические моменты равны

$$M_x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\frac{2x}{\pi}}^{\sin x}y\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}y^2\Big|_{y=\frac{2x}{\pi}}^{y=\sin x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x}{4}-\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{2}{3}\frac{x^3}{\pi^2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{24}.$$

$$M_y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\frac{2x}{\pi}}^{\sin x}x\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\sin x-\frac{2x}{\pi}\right)dx=$$

$$=\left[-x\cos x+\sin x-\frac{2x^3}{3\pi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{\pi^2}{12}.$$

Для определения координат центра тяжести найдем площадь рассматриваемой фигуры

$$Q=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x-\frac{2x}{\pi}\right)dx=\left[-\cos x-\frac{x^2}{\pi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{\pi}{4}.$$

* Имеются в виду «геометрические моменты», т. е. предполагается $\rho=1$.

Теперь по формуле (6) находим

$$\xi = \frac{1 - \frac{\pi^2}{12}}{1 - \frac{\pi}{4}} = \frac{12 - \pi^2}{3(4-\pi)},$$

$$\eta = \frac{\frac{\pi}{24}}{1 - \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{6(4-\pi)}.$$

Пример 2. Подсчитать моменты инерции относительно координатных осей фигуры, рассмотренной в примере 1, полагая $= 1$.

По формуле (7) находим

$$I_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\frac{2x}{\pi}}^{\sin x} y^2 dy = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^3 \Big|_{\frac{2x}{\pi}}^{\sin x} dx = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^3 x - \frac{8x^3}{\pi^3} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left[-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x - \frac{2x^4}{\pi^3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{3} \left(-\frac{\pi}{8} + 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{9} - \frac{\pi}{24} \approx 0{,}09.$$

Аналогично, формула (8) дает

$$I_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\frac{2x}{\pi}}^{\sin x} x^2 \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 \sin x - \frac{2x^3}{\pi} \right) dx =$$

$$= \left[2x \sin x - (x^2 - 2) \cos x - \frac{x^4}{2\pi} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2 - \frac{\pi^3}{32} \approx 0{,}17.$$

ГЛАВА II

КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Криволинейный интеграл первого типа (по дуге)

Рассмотрим пример, приводящий к понятию криволинейного интеграла.

Пример. *Задача о массе материальной линии.* Под материальной линией мы будем понимать тело, поперечными размерами которого по сравнению с длиною можно пренебречь. Примерами таких материальных тел являются цепи, канаты, нити и т. п.

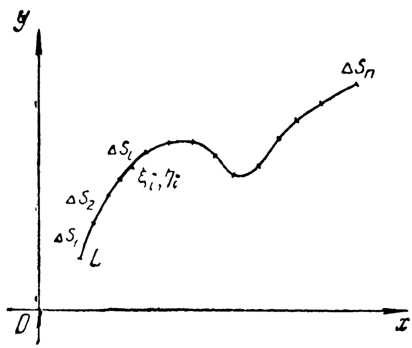


Рис. 31

Пусть на плоскости xOy дана неоднородная материальная линия L, плотность которой в каждой точке известна. При этом речь должна идти о линейной плотности, т. е. о массе единицы длины, определенной как предел отношения массы участка к его длине, когда последняя стремится к нулю. Каждая точка линии имеет две координаты (x, y), поэтому линейная плотность есть функция двух переменных $\gamma = \gamma(x, y)$, определенная в точках линии L. Если γ постоянна, то масса линии может быть найдена простым умножением плотности на длину, $m = \gamma s$.

Для нахождения массы неоднородной линии разобьем линию L на n участков (рис. 31), длины которых обозначим через $\Delta s_1, \Delta s_2 \ldots \ldots \Delta s_n$, и выберем на каждом из участков произвольную точку (ξ_i, η_i). Считая плотность каждого участка приблизительно постоянной и равной плотности в выбранной точке, выразим массу участка с номером i таким образом:

$$\Delta m_i \approx \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i. \tag{1}$$

Суммирование равенств (1) по всем n участкам дает приближенное выражение массы линии L

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i, \tag{2}$$

а переход к пределу при неограниченном увеличении числа участков деления так, что длина каждого отдельного участка стремится к нулю, позволяет устранить ошибки приближенных равенств (1) и (2), поэтому

$$m = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta s \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i. \tag{3}$$

В приведенной задаче мы без труда узнаем ставшую уже привычной схему построения интеграла. Поэтому можно сразу перейти к общему определению.

Пусть на плоскости xOy задана кривая L, в каждой точке которой определена функция двух переменных $z=f(x, y)$. Разобьем линию L на n частей (рис. 41) и на каждом из участков выберем произвольную точку. *Интегральной суммой*, построенной для функции $f(x, y)$ по кривой L, будем называть *сумму произведений значений функции в выбранных точках на длины соответствующих участков разбиения*,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i. \tag{4}$$

Предел интегральной суммы (4), *когда число участков разбиения неограниченно возрастает так, что длина каждого стремится к нулю, называется криволинейным интегралом первого типа функции* $f(x, y)$ *по кривой* L (или *криволинейным интегралом по дуге**). Кривую L часто называют *путем интегрирования*.

Криволинейный интеграл первого типа обозначается символом $\int\limits_L f(x, y)\,ds$. Таким образом, по определению

$$\int\limits_L f(x, y)\,ds = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta s \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i. \tag{5}$$

Формулу (3) для массы материальной линии можно поэтому записать через интеграл от линейной плотности

$$m = \int\limits_L \gamma(x, y)\,ds. \tag{6}$$

---

* Более правильно говорить «*по длине дуги*», но мы будем пользоваться приведенным сокращенным выражением.

Формула (6) выясняет физический смысл криволинейного интеграла первого типа. Поясним его геометрический смысл. Восставим в каждой точке линии L перпендикуляр к плоскости xOy и отложим на нем значение функции в этой точке (рис. 32). Получающуюся цилиндрическую поверхность с основанием L мы назовем *забором*. Ясно, что интеграл (5) выражает площадь поверхности забора, а слагаемые интегральной суммы (4) — площади «отдельных досок», подрезанных горизонтально.

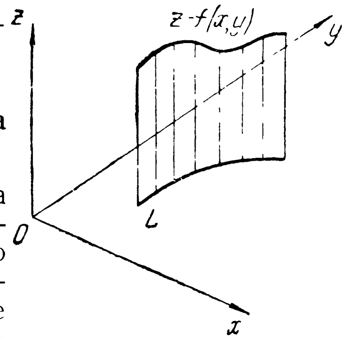


Рис 32

§ 2. Свойства криволинейного интеграла первого типа. Его вычисление

Свойства криволинейного интеграла первого типа, так же как и двойного интеграла, представляют полную аналогию свойствам определенного интеграла. Будем предполагать, что рассматриваемые интегралы существуют, т. е. пределы интегральных сумм существуют и не зависят ни от способа разбиения кривой L, ни от выбора точек (ξ, η).

1. *Постоянный множитель может быть вынесен за знак криволинейного интеграла*

$$\int\limits_L cf(x, y)\,ds = c\int\limits_L f(x, y)\,ds \tag{1}$$

2. *Криволинейный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от отдельных слагаемых,*

$$\int\limits_L [f(x, y) \pm \varphi(x, y)]\,ds = \int\limits_L f(x, y)\,ds \pm \int\limits_L \varphi(x, y)\,ds. \tag{2}$$

3. *Если дуга L разбита точкой C на две части L_1 и L_2, $L=L_1+L_2$, то криволинейный интеграл от функции $f(x, y)$ по дуге L равен сумме криволинейных интегралов от той же функции по дугам L_1 и L_2,*

$$\int\limits_{L=L_1+L_2} f(x, y)\,ds = \int\limits_{L_1} f(x, y)\,ds + \int\limits_{L_2} f(x, y)\,ds. \tag{3}$$

4. *Если функции $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ в каждой точке кривой L удовлетворяют неравенству $f(x, y) \geqslant \varphi(x, y)$, то*

$$\int\limits_L f(x, y)\,ds \geqslant \int\limits_L \varphi(x, y)\,ds. \tag{4}$$

5. *Если $f(x, y) \equiv 1$, то криволинейный интеграл равен длине пути интегрирования,*

$$\int\limits_L ds = s, \tag{5}$$

где s означает длину дуги L.

6. *Если функция $f(x, y)$ удовлетворяет неравенствам $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$; то*

$$ms \leqslant \int\limits_L f(x, y)\, ds \leqslant Ms. \tag{6}$$

7. Теорема о среднем. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна на кривой L, то на ней существует такая точка (ξ, η), что*

$$\int\limits_L f(x, y)\, ds = f(\xi, \eta)\, s. \tag{7}$$

Рекомендуем читателю возвратиться к свойствам двойных интегралов и сравнить их свойства со свойствами криволинейного интеграла первого типа.

Остановимся еще на свойстве, аналогичном свойству $\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$ определенного интеграла. Криволинейный интеграл первого типа таким свойством не обладает, потому что на кривой L не было задано направления и не сказано, какая из ограничивающих дугу кривой точек является ее началом, а какая — концом Это по существу безразлично для построения интегральной суммы, так что *криволинейный интеграл первого типа не зависит от направления на дуге.*

Однако в ряде случаев естественно рассматривать в качестве пути интегрирования L ориентированную кривую, т. е. задавать на кривой определенное направление. В этом случае длины участков разбиения приобретают знаки, которые изменяются на противоположные при изменении направления интегрирования. Поэтому *криволинейный интеграл первого типа по ориентированной кривой при перемене направления интегрирования изменяет знак на противоположный.* Стоит только поставить интегралы в одинаковые условия и они будут вести себя совершенно одинаково.

Криволинейный интеграл первого типа легко сводится к обычному определенному интегралу, чем сразу решается вопрос о его вычислении. Пусть кривая L гладкая, т. е. она непрерывна и имеет непрерывно вращающуюся касательную.

Предположим сначала, что кривая задана параметрически, причем роль параметра играет длина дуги, т. е. кривая L задана уравнениями

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (s_0 \leqslant s \leqslant s_1). \tag{8}$$

В таком случае интегральная сумма (формула (4) из § 1) приобретает вид

$$\sum_{i=1}^{n} f[x(s_i), y(s_i)]\, \Delta s_i, \tag{9}$$

где s_i выбраны так, что $\xi_i=x(s_i)$, $\eta_i=y(s_i)$. Выражение (9) представляет собой обычную интегральную сумму, предел которой является обычным определенным интегралом. Следовательно, переход к пределу дает

$$\int\limits_L f(x,\ y)\,ds=\int\limits_{s_0}^{s_1} f[x(s),\ y(s)]\,ds, \tag{10}$$

причем слева стоит криволинейный интеграл по дуге, а справа — обычный определенный интеграл по переменной s.

Возможность приведения криволинейного интеграла к обычному определенному позволяет легко сформулировать достаточные условия существования криволинейного интеграла первого типа: достаточно, чтобы *кривая L была спрямляема и состояла из конечного числа гладких,* т. е. непрерывных и имеющих непрерывно вращающуюся касательную, *дуг, а функция $f(x,\ y)$ была бы непрерывна на кривой L.*

Конечно, формула (10) почти не имеет практической ценности, потому что задание кривой уравнениями (8) встречается редко. Однако от формулы (10) легко перейти к другой. Так, если кривая L задана параметрически уравнениями

$$x=x(t),\ y=y(t)\quad t_0\leqslant t\leqslant T, \tag{11}$$

где t — произвольный параметр и функции $x(t)$, $y(t)$ непрерывны и дифференцируемы, то длина дуги s также есть функция параметра t, $s=s(t)$, причем, как известно,

$$s'=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}.$$

Заменяя в определенном интеграле (10) переменную s на t, сразу получаем

$$\int\limits_L f(x,\ y)\,ds=\int\limits_{t_0}^{T} f[x(t),\ y(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt. \tag{12}$$

Формула (12) дает возможность вычислять криволинейный интеграл в том случае, когда путь интегрирования L задан параметрически через произвольный параметр. Если кривая L задана явным уравнением $y=y(x)$ или $x=x(y)$, то формула (12) примет еще более простой вид. Именно, для $y=y(x)$ получаем

$$\int\limits_L f(x,\ y)\,ds=\int\limits_a^b f[x,y(x')]\sqrt{1+(y')^2}\,dx, \tag{13}$$

а для $x=x(y)$,

$$\int\limits_L f(x,\ y)\,ds=\int\limits_\alpha^\beta f(x(y),\ y)\sqrt{1+(x')^2}\,dy. \tag{14}$$

Формулы (12), (13), (14) показывают, что криволинейный интеграл может быть сведен к обычному определенному интегралу, если под знаком интеграла переменные x, y, ds заменить одной переменной и ее дифференциалом, пользуясь правилами дифференциального исчисления чисто формально.

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L y\,ds$, где L — дуга параболы $y^2=2px$ от точки (0, 0) до точки (x_0, y_0).

Здесь кривая задана явным уравнением $x=\frac{y^2}{2p}$, откуда $x'=$ $=\frac{y}{p}$. Пользуясь формулой (14), находим

$$\int\limits_L y\,ds=\int\limits_0^{y_0} y\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}\,dy=\frac{1}{p}\int\limits_0^{y_0}(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}y\,dy=$$

$$=\frac{1}{3p}(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{y_0}=\frac{(p^2+y^2_0)^{\frac{3}{2}}-p^3}{3p}.$$

Пример. 2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L xy\,ds$ по дуге четверти эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, лежащей в первом квадранте. В этом примере придется воспользоваться формулой (12), которая дает

$$\int\limits_L xy\,ds=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\, b\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=$$

$$=\frac{ab}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,d\sin^2 t.$$

Таким образом,

$$\int\limits_L xy\,ds=\frac{ab\,(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{3\,(a^2-b^2)}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{ab\,(a^2+ab+b^2)}{3\,(a+b)}.$$

Пример 3. Найти массу участка цепной линии $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ между точками $x=0$ и $x=a$, если плотность кривой в каждой ее точке обратно пропорциональна ординате точки.

Как показывает формула (6) предыдущего параграфа, масса линии выразится криволинейным интегралом

$$m=\int_L \frac{k}{y}\,ds,$$

где L — указанная дуга цепной линии, k — коэффициент пропорциональности. Для вычисления криволинейного интеграла воспользуемся формулой (13). Так как

$$y'=\operatorname{sh}\frac{x}{a},\quad ds=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx=\operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx,$$

то

$$m=\int_0^a \frac{k}{a\operatorname{ch}\frac{x}{a}}\operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx=\int_0^a \frac{k}{a}\,dx=k.$$

Криволинейный интеграл первого рода может быть использован для нахождения статических моментов относительно координатных осей и координат центра тяжести материальной линии. Действительно, для выделенного на рис. 31 участка Δs_i имеем

$$\Delta M_x=y\gamma\Delta s,$$

$$\Delta M_y=x\gamma\Delta s,$$

где γ — линейная плотность линии. Суммируя эти выражения по всем участкам и переходя к пределу, получаем

$$M_x=\int_L y\gamma(x,y)\,ds,\quad M_y=\int_L x\gamma(x,y)\,ds. \tag{15}$$

Формулы (15) могут быть использованы для нахождения координат центра тяжести, как это уже было сделано в § 8 первой главы. Мы получим

$$\xi=\frac{M_y}{m}=\frac{\int_L x\gamma(x,y)\,ds}{\int_L \gamma(x,y)\,ds};\quad \eta=\frac{M_x}{m}=\frac{\int_L y\gamma(x,y)\,ds}{\int_L \gamma(x,y)\,ds}. \tag{16}$$

Как и для плоской фигуры, часто рассматривают «геометрические моменты», полагая $\gamma\equiv 1$. Впрочем, в формулах (16) достаточно предположить, что линия однородна, после чего величина γ уже не будет иметь значения.

Пример 4. Найти статические моменты относительно координатных осей и координаты центра тяжести полуарки циклоиды (рис. 33)

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)\quad (0\leqslant t\leqslant \pi),$$

предполагая $\gamma\equiv 1$.

Пользуясь формулами (15) и (12), находим

$$M_x=\int_L y\,ds=\int_0^{\pi} a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt,$$

или, переходя к половинным углам,

$$M_x=a^2\int_0^{\pi} 2\sin^2\frac{t}{2}\,2\sin\frac{t}{2}\,dt=8a^2\int_0^{\pi}\left(\cos^2\frac{t}{2}-1\right)d\cos\frac{t}{2}=$$

$$=8a^2\left[\frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{16}{3}a^2.$$

Точно так же, для статического момента M_y,

$$M_y=\int_L x\,ds=\int_0^{\pi} a(t-\sin t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt.$$

Преобразования дают

$$M_x=2a^2\int_0^{\pi}(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=2a^2\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin\frac{t}{2}\,dt-\int_0^{\pi}\sin t\sin\frac{t}{2}\,dt\right\}=$$

$$=2a^2\left[4\sin\frac{t}{2}-2t\cos\frac{t}{2}-\frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{16}{3}a^2.$$

Для определения координат центра тяжести остается лишь найти длину дуги. Получаем

$$s=\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=2a\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi}=4a.$$

Отсюда, пользуясь формулой (16), находим

$$\xi = \eta = \frac{4}{3}a.$$

§ 3. Криволинейный интеграл второго типа (по координатам)

Интегральную сумму, предел которой дает криволинейный интеграл второго типа, можно получить формально следующим образом. Рассмотрим разбиение кривой L (рис. 34) и вместо длины участка разбиения Δs_i возьмем проекцию этого участка на оси координат.

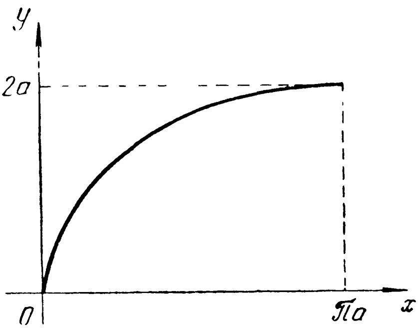


Рис. 33

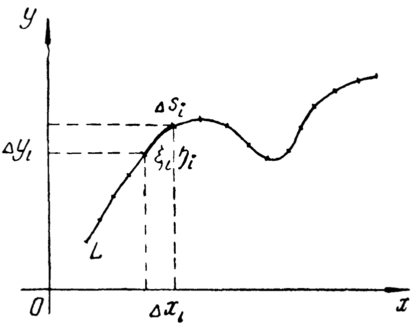


Рис. 34

Заменяя в интегральной сумме (4) из § 1 величину Δs_i соответствующей проекцией (рис. 34), получим две другие интегральные суммы

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta x_i, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta y_i. \tag{2}$$

Предел каждой из таких интегральных сумм носит название *криволинейного интеграла второго типа* и обозначается, соответственно, символами

$$\int_L f(x, y)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta x_i,$$

$$\int_L f(x, y)\,dy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta y\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta y_i.$$

Впрочем, в большинстве случаев рассматривают две различные функции двух переменных, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, причем для одной из них составляют интегральную сумму (1), а для второй — интегральную сумму (2). В таком случае *криволинейным интегралом второго типа* или *криволинейным интегралом по координатам* называют предел суммы этих двух сумм, который обозначается

$$\int_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x,\ \Delta y \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \{P(\xi_i, \eta_i)\,\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\,\Delta y_i\}. \quad (3)$$

Познакомимся теперь с физической задачей, приводящей к понятию криволинейного интеграла второго типа вида (3).

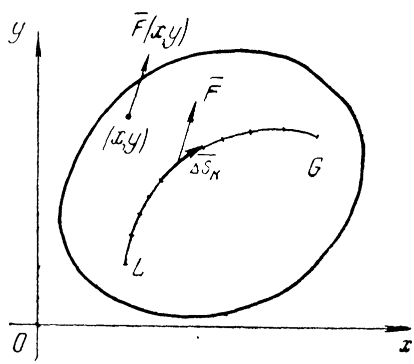


Рис 35

Пример. *Работа плоского силового поля.* Пусть в области G плоскости xOy задано плоское силовое поле, т. е. на материальную точку, помещенную в области G, действует сила F, вполне определенная в каждой точке G. Математически силовое поле описывается *векторным полем* или вектор-функцией двух аргументов, т. е. каждой точке (x, y) области G ставится в соответствие определенный вектор $\overline{F} = \overline{F}(x, y)$ (рис. 35).

Вычислим работу, которую совершают силы поля при передвижении материальной точки вдоль линии L. Разобьем линию L на участки и рассмотрим участок с номером k, на котором выбрана некоторая точка (ξ_k, η_k) (рис. 35).

Заменим данный криволинейный участок прямолинейным вектором перемещения $\overline{\Delta s_k}$. На точку на этом участке действует сила $\overline{F_k} = \overline{F}(\xi_k, \eta_k)$. Следовательно, работа сил поля на этом участке равна

$$\Delta A_k = \overline{F_k}\,\overline{\Delta s_k} = \overline{F}(\xi_k, \eta_k)\,\overline{\Delta s_k}. \quad (4)$$

Скалярное произведение векторов (4) запишем в координатной форме. Разложим каждый из векторов $\overline{F}$ и $\overline{\Delta s}$ по ортам декартовых осей, которые мы обозначим, как обычно, $\overline{i}$ и $\overline{j}$. Для вектора перемещения можно написать

$$\overline{\Delta s_k} = \Delta x_k \overline{i} + \Delta y_k \overline{j}, \quad (5)$$

где Δx_k, Δy_k — проекции Δs_k на координатные оси. Проекции вектора $\overline{F} = \overline{F}(x, y)$ также будут функциями точки (x, y). Обозначив их через $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, получаем

$$\overline{F}_k = \overline{F}(\xi_k, \eta_k) = P(\xi_k, \eta_k)\overline{i} + Q(\xi_k, \eta_k)\overline{j}. \tag{6}$$

Выражение (4) для работы на элементарном участке можно получить как скалярное произведение векторов (5) и (6). Используя координатную форму скалярного произведения, находим

$$\Delta A_k = \overline{F}_k \overline{\Delta s_k} = P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k. \tag{7}$$

Остается просуммировать выражения вида (7) по всем элементарным участкам и перейти к пределу, в результате чего для работы силового поля получим

$$A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x, \Delta y \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \{P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k\} =$$

$$= \int_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \tag{8}$$

Итак, *криволинейный интеграл второго типа выражает работу силового поля.*

Не представляет никаких затруднений показать, что криволинейный интеграл второго типа обладает свойствами 1—4 интеграла первого типа, приведенными в § 2. Кроме того, *криволинейный интеграл второго типа при перемене направления интегрирования изменяет знак на противоположный, т. е.*

$$\int_{-L} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = -\int_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy, \tag{9}$$

где через $-L$ обозначена кривая L, которая проходится в обратном направлении. Равенство (9) вытекает из того, что при перемене направления на кривой L множители Δx_k и Δy_k во всех слагаемых интегральной суммы (3) изменяют знаки на противоположные.

Криволинейный интеграл второго типа, как и первого, легко сводится к обычному определенному интегралу, что сразу решает вопрос о его вычислении. Так, если кривая L задана явным уравнением $y=y(x)$, то интегральная сумма (1) сразу обращается в сумму

$$\sum_{i=1}^{n} [f\xi_i, y(\xi_i)]\Delta x_i,$$

предел которой есть обычный определенный интеграл $\int_a^b f[x, y(x)]dx$.

С помощью аналогичных рассуждений можно получить следующую формулу для сведения криволинейного интеграла второго типа к определенному. Если кривая L задана параметрически уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $(t_0 \leqslant t \leqslant T)$, то

$$\int_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_{t_0}^{T} \{P[x(t), y(t)]\,x'(t) +$$

$$+ Q[x(t), y(t)]\,y'(t)\}\,dt. \qquad (10)$$

Пример 1. Вычислить интеграл $I = \int_L xy\,dx - (x+y)\,dy$, принимая за линию L (рис. 36):

а) прямолинейный отрезок, соединяющий точки $O(0, 0)$ и $A(1, 1)$;

б) ломаную OBA;

в) ломаную OCA.

Решение. В случае а) путь интегрирования имеет уравнение $y = x$, откуда $dy = dx$ и

$$I = \int_0^1 (x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^1 = -\frac{2}{3}.$$

Ломаная OBA в случае б) состоит из двух звеньев. На участке OB имеем $y=0$ и $dy=0$, так что

$$\int_{OB} xy\,dx - (x+y)\,dy = 0.$$

На участке BA получаем $x=1$, $dx=0$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$. Отсюда

$$I = \int_0^1 -(1+y)\,dy = -\frac{(1+y)^2}{2}\Big|_0^1 = -\frac{3}{2}.$$

Наконец, в случае в) интеграл по ломаной OCA также распадается на два интеграла. На участке OC имеем $x=0$, $dx=0$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$, а на участке CA получаем $y=1$, $dy=0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Следовательно,

$$I = \int_0^1 -y\,dy + \int_0^1 x\,dx = -\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 0.$$

Итак, во всех трех случаях мы получили различные значения интеграла, хотя все пути интегрирования соединяли одни и те же точки. Бывают, однако, случаи, когда интеграл не изменяется при изменении пути интегрирования между теми же точками.

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл $I=\int\limits_L (y+1)dx+ +(x-1)\,dy$ (рис. 37):

а) вдоль прямолинейного отрезка OA;

б) вдоль ломаной OBA;

в) вдоль параболы $y^2=x$ от точки O до точки A;

г) вдоль кубической параболы $y=x^3$ между теми же точками.

Решение. а) Уравнение отрезка OA, как мы знаем, $y=x$, откуда $dy=dx$. Так как здесь $0\leqslant x\leqslant 1$, то

$$I=\int\limits_0^1 [(x+1)+(x-1)]\,dx=x^2\Big|_0^1=1$$

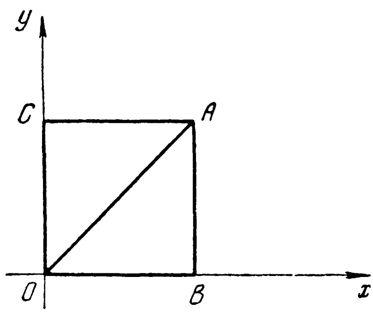


Рис. 36

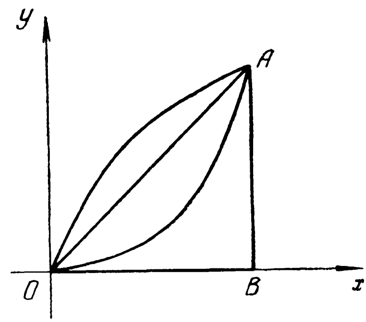


Рис. 37

б) На участке OB имеем $y=0$, $dy=0$, $0\leqslant x\leqslant 1$, а на BA получаем $x=1$, $dx=0$, $0\leqslant y\leqslant 1$; отсюда

$$I=\int\limits_0^1 dx=1,$$

так как по участку BA интеграл равен нулю.

в) Принимая $x=y^2$, $dx=2y\,dy$, находим

$$I=\int\limits_0^1 [(y+1)\,2y+(y^2-1)]\,dy=[y^3+y^2-y]_0^1=1.$$

г) Здесь $y=x^3$, $dy=3\,x^2dx$, следовательно,

$$I=\int\limits_0^1 [(x^3+1)+(x-1)\,3\,x^2]\,dx=[x^4-x^3+x]\,dx=1.$$

Таким образом, интеграл имеет одно и то же значение для всех четырех линий, соединяющих точки O и A.

§ 4. Формула Грина

Формула Грина устанавливает связь между двойным интегралом по некоторой области G и криволинейным интегралом второго типа по границе этой области*.

Пусть в области G, границу которой мы обозначим буквой C, заданы две функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, непрерывные в замкнутой области вместе со своими первыми частными производными. Предположим сначала, что линия C такова, что пересекается с любым перпендикуляром к осям Ox или Oy не более чем в двух точках.

Установим на линии C положительное направление обхода против часовой стрелки (т. е. так, чтобы при обходе область оставалась слева) и разобьем ее двумя различными способами с помощью двух пар точек на две пары линий: линии L_1 и L_2, ограничивающие G снизу и сверху, или линии L_3 и L_4, ограничивающие область слева и справа (рис. 38). Пусть уравнения линий L_1 и L_2 будут $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$, а линий L_3 и L_4, соответственно, $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$.

Рассмотрим в области G двойной интеграл $\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy$. Интегрируя сперва по y, а затем по x, находим

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int\limits_a^b \Big[P(x, y)\Big]_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} dx =$$

$$= \int\limits_a^b [P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))]\,dx.$$

Интеграл $\int\limits_a^b P(x, \varphi_2(x))\,dx$ можно рассматривать как криволинейный интеграл по кривой L_2. Однако, так как на L_2 установлено направление справа налево, то его следует взять со знаком минус. Итак,

$$\int\limits_a^b P(x, \varphi_2(x))\,dx = -\int\limits_{L_2} P(x, y)\,dx.$$

Точно так же

$$\int\limits_a^b P(x, \varphi_1(x))\,dx = \int\limits_{L_1} P(x, y)\,dx,$$

откуда

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = -\int\limits_{L_2} P(x, y)\,dx - \int\limits_{L_1} P(x, y)\,dx,$$

---

* В таких случаях часто говорят — *интеграл по замкнутому контуру*.

или, так как кривые L_1 и L_2 в сумме составляют границу области,

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = -\int\limits_C P(x, y)\,dx. \qquad (1)$$

Для двойного интеграла $\iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy$, аналогично, получаем

$$\iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy = \int\limits_C Q(x, y)\,dy. \qquad (2)$$

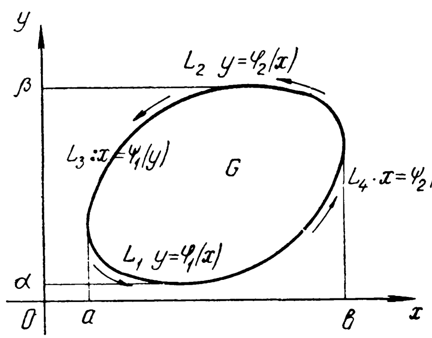


Рис. 38

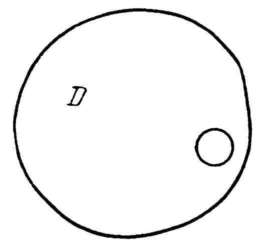


Рис. 39

Вычитая из равенства (2) равенство (1), приходим к формуле, справедливость которой и утверждается теоремой Грина

$$\int\limits_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Распространим теперь формулу Грина на более общий случай. Для этого введем понятие *односвязной области*. Область называется *односвязной*, если ее граница состоит из одной связной линии, а не распадается на несколько отдельных кривых. Примерами односвязных областей являются круг, область, ограниченная эллипсом, область, изображенная на рис. 38, и т. д. Наоборот, кольцо или область D, изображенная на рис. 39, не являются односвязными, так как их граница распадается на две не связанные между собой линии.

Более точно *область называется односвязной, если всякий замкнутый контур, проведенный в области, содержит внутри себя лишь точки области*, так что *каждый замкнутый контур, проведенный в области, можно непрерывной деформацией стянуть в точку, не задевая при этом точек, не принадлежащих области.* Ясно, что для области, изображенной на рис. 39, замкнутый контур, содержащий внутри себя «дырку», не может быть стянут в точку, пока он остается внутри D.

Теперь мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема Грина. *Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в односвязной области G вместе со своими частными производными, то справедлива формула*

$$\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy, \tag{3}$$

где C означает границу области G, проходимую в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки.

Для доказательства разобьем область G отрезками на части таким образом, чтобы граница каждой из них удовлетворяла постав-

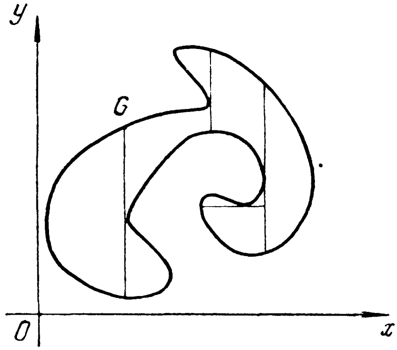


Рис. 40

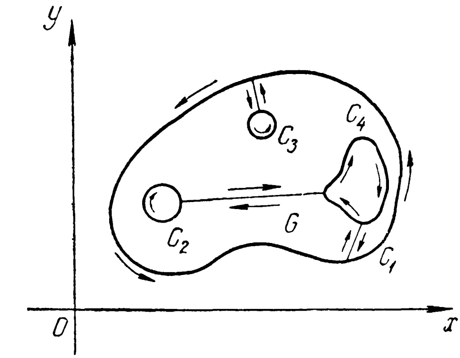


Рис. 41

ленным выше условиям, т. е. пересекалась с перпендикулярами к координатным осям не более чем в двух точках (рис. 40). Тогда для каждой из частей теорема Грина верна по доказанному выше. Сложим равенства (3), написанные для каждой из частей. Сумма двойных интегралов по частям области G равна двойному интегралу по G (вследствие свойства 3 двойных интегралов, § 2, гл. I). Что касается суммы криволинейных интегралов, то легко заметить, что по каждому из отрезков разбиения криволинейный интеграл берется дважды во взаимно противоположных направлениях. Поэтому интегралы по таким участкам будут уничтожаться и сумма криволинейных интегралов равна криволинейному интегралу по границе области G. Следовательно, формула Грина (3) верна и для всей области G.

Теорему Грина можно распространить также на случай многосвязных областей. Пусть G — многосвязная область, ограниченная снаружи контуром C_1 и внутри — контурами $C_2, C_3, \ldots, C_n$ (границы «дырок»). Соединим каждый из внутренних контуров дополнительным отрезком («разрезом») с внешним контуром C_1 или с другим внутренним контуром таким образом, чтобы после проведения разрезов область сделалась односвязной (рис. 41). Тогда можно написать

$$\iint_G \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) dx\,dy = \int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy, \tag{4}$$

где C означает полную границу области G, т. е. включает контуры $C_1, C_2, \ldots, C_n$, а также все проведенные дополнительно разрезы. При этом интегрирование производится таким образом, чтобы при обходе границы область оставалась слева. Это направление показано на рис. 41 стрелками.

Легко заметить, что по каждому из разрезов интеграл берется дважды и в противоположных направлениях, так что все такие интегралы взаимно уничтожаются. Что касается остающихся интегралов по всем контурам $C_1, C_2, \ldots, C_n$, то мы замечаем, что интеграл по внешнему контуру C_1 берется по направлению против часовой стрелки, а по всем внутренним — по направлению по часовой стрелке.

Криволинейный интеграл в правой части равенства (4) распадается, следовательно, на сумму интегралов по отдельным контурам и формула принимает вид

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_{C_1} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy +$$

$$+ \int\limits_{C_2} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy + \ldots + \int\limits_{C_n} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy, \tag{5}$$

где направления на контурах $C_1, C_2, \ldots, C_n$ выбраны описанным выше способом. Если же, как это часто делается, установить на всех замкнутых контурах одинаковое направление положительной ориентации — против часовой стрелки, то в формуле (5) интегралы по внутренним контурам следует писать со знаком минус, так что формула Грина для многосвязной области будет иметь вид

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_{C_1} Pdx + Qdy - \int\limits_{C_2} Pdx + Qdy - \ldots - \int\limits_{C_n} Pdx + Qdy. \tag{6}$$

§ 5. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования. Восстановление функции двух переменных по полному дифференциалу

Как видно из определения, криволинейный интеграл второго типа зависит от вида функций P и Q и кривой, по которой интеграл берется. Если путь интегрирования заменить некоторым другим путем, соединяющим те же точки, то величина интеграла, вообще говоря, изменится. В этом легко убедиться, обратившись к примерам 1, 2, рассмотренным в § 3.

Интересно выяснить, чем объясняется такое различие между интегралами, приведенными в примерах 1 и 2, каким условиям должен удовлетворять криволинейный интеграл, чтобы он обладал свойством независимости от пути, которое наблюдается в примере 2. Этим вопросом мы и будем заниматься в настоящем параграфе.

Отметим прежде всего, что с помощью простой леммы этот вопрос можно заменить другим, решение которого легче получить.

Лемма. *Криволинейный интеграл второго типа не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда интеграл от того же дифференциального выражения по любому замкнутому контуру равен нулю.*

Доказательство. Предположим, что интеграл не зависит от пути, т. е. интеграл по любому пути, соединяющему любые две точки A и B, сохраняет одно и то же значение. Пусть $ACBDA$ — произвольный замкнутый контур (рис. 42), на котором отмечены две произвольные точки A и B. По предположению,

$$\int\limits_{ACB} = \int\limits_{ADB}$$

(выражение под знаком интеграла для краткости опускаем). Отсюда следует, что

$$\int\limits_{ACBDA} = \int\limits_{ACB} + \int\limits_{BDA} = \int\limits_{ACB} - \int\limits_{ADB} = 0,$$

т. е. интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю.

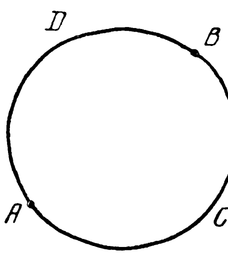


Рис. 42

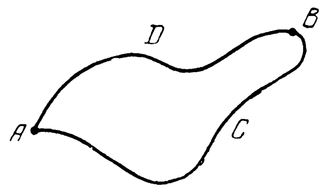


Рис. 43

Допустим теперь, наоборот, что интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю и докажем, что отсюда следует независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования. В самом деле, путь A и B — две произвольные точки, а ACB и ADB — соединяющие их пути (рис. 43). Они образуют замкнутый контур $ACBDA$, для которого, в силу предположения,

$$\int\limits_{ACBDA} = 0.$$

Отсюда выводим

$$0 = \int\limits_{ACB} + \int\limits_{BDA} = \int\limits_{ACB} - \int\limits_{ADB},$$

поэтому

$$\int\limits_{ACB} = \int\limits_{ADB},$$

т. е. оба интеграла равны, а значит, интеграл не зависит от пути, что и утверждалось.

Таким образом, достаточно отыскать условия, при которых криволинейный интеграл по всякому замкнутому контуру равнялся бы нулю. Это и будут условия независимости от пути. Условия эти даются следующей теоремой.

Теорема. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими первыми частными производными в односвязной области G. Тогда, для того чтобы криволинейный интеграл*

$$\int\limits_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \tag{1}$$

не зависел в области G от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках G выполнялось равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{2}$$

Доказательство. Как уже было отмечено, вместо независимости интеграла (1) от пути можно говорить об условиях равенства нулю интеграла

$$\int\limits_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \tag{3}$$

по любому замкнутому контуру C внутри области.

Достаточность условия (2) для равенства нулю интеграла (3) совершенно очевидна. В самом деле, пусть в G дан произвольный замкнутый контур C. Так как область G односвязна, то часть ее D, заключенная внутри C, заведомо принадлежит G, так что функции P и Q непрерывны в D вместе со своими частными производными. Следовательно, к области D можно применить формулу Грина

$$\int\limits_C P dx + Q dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy.$$

Но двойной интеграл справа равен нулю вследствие условия (2), которое предполагается выполненным. Тем самым достаточность условия (2) доказана.

Чтобы доказать необходимость условия (2), воспользуемся следующей простой леммой, относящейся к двойным интегралам.

Лемма. *Если двойной интеграл*

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx dy$$

равен нулю по любой части D области G, то непрерывная функция $f(x, y)$ тождественно равна нулю в G.

Действительно, предположим, что функция $f(x, y)$ отлична от нуля хотя бы в одной точке. Пусть, например, $f(x_0, y_0) = \sigma > 0$. В силу непрерывности $f(x, y)$ найдется такое расстояние ρ, что во всех точках ρ- окрестности (x_0, y_0) функция будет превосходить $\sigma - \varepsilon$ при произвольно малом ε.

Взяв достаточно малое ε, можем считать, что во всех точках круга D_0 с центром в (x_0, y_0) и радиусом ρ имеем $f(x, y) > \frac{\sigma}{2}$. Но тогда для двойного интеграла по кругу D_0, вследствие свойства 6 двойных интегралов (см. равенство (10), § 2 главы I) можно написать

$$\iint\limits_{D_0} f(x, y)\,dxdy > \frac{\sigma}{2}\pi\rho^2,$$

что противоречит условию, по которому двойной интеграл обращается в нуль по любой области. Таким образом, функция $f(x, y)$ не может быть отлична от нуля ни в одной точке.

Возвращаясь к доказательству нашей теоремы, замечаем, что равенство нулю интеграла (3), в силу теоремы Грина, означает равенство нулю по любой части области G двойного интеграла

$$\iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Но тогда из только что доказанной леммы следует, что стоящая под знаком интеграла разность

$$f(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

должна быть тождественно равна нулю в G, откуда и следует выполнение условия (2).

Легко проверить, что в интеграле примера 2 условие (2) выполняется, а в примере 1 — нет. Так, в интеграле

$$\int\limits_{L} xydx - (x+y)\,dy$$

имеем

$$P(x, y) = xy,\ Q(x, y) = -(x+y),$$

откуда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -1,$$

так что

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Наоборот, в интеграле

$$\int\limits_{L} (y+1)\,dx + (x-1)\,dy$$

функции

$$P(x, y) = y+1,\ \text{а}\ Q(x, y) = x-1,$$

поэтому

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=1.$$

Пример. Для криволинейного интеграла $\int\limits_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ условия (2) выполняются, так как

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Однако, если замкнутая кривая C содержит внутри себя начало координат, то интеграл по такой кривой отличен от нуля. Это не противоречит основной теореме, потому что обе функции P и Q в этом случае будут разрывны в области G — они обращаются в бесконечность в начале координат.

Приняв за кривую C окружность $x=a\cos t, y=a\sin t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, найдем

$$\int\limits_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int\limits_0^{2\pi}\frac{a\cos t a\sin t-a\sin t(-a\cos t)}{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}\,dt=2\pi.$$

Таким образом, величина интеграла будет *одной и той же* для любой окружности с центром в начале координат. Можно доказать, что эта величина сохраняется для любой замкнутой кривой, содержащей начало координат внутри себя.

Условия независимости криволинейного интеграла от пути позволяют использовать криволинейный интеграл для решения вопроса о том, является ли дифференциальное выражение $P(x, y)dx+$ $+Q(x, y)dy$ полным дифференциалом некоторой функции двух переменных. Если это так, то с помощью того же криволинейного интеграла можно найти и эту функцию. Иначе говоря, *криволинейный интеграл* (1) *решает задачу о восстановлении первообразной по полному дифференциалу.* Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в области G вместе со своими первыми частными производными. Тогда для того, чтобы дифференциальное выражение*

$$P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy \tag{4}$$

являлось полным дифференциалом функции двух переменных, необходимо и достаточно, чтобы криволинейный интеграл от этого выражения не зависел от пути интегрирования. При этом криволинейный интеграл (1), *взятый от фиксированной точки (x_0, y_0) до переменной точки (x, y), будет функцией этой точки, т. е. функцией двух переменных, полный дифференциал которой равен выражению (4).*

Доказательство необходимости. Предположим, что выражение (4) является полным дифференциалом, т. е. что существует функция двух переменных $U=U(x, y)$, для которой

$$dU=P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy,$$

или, что то же самое,

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P, \quad \frac{\partial U}{\partial y}=Q.$$

Покажем, что в этом случае криволинейный интеграл (1) не зависит от пути. Вычисляя смешанные вторые производные для функции U, находим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)=\frac{\partial P}{\partial y}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Вследствие непрерывности частных производных $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ смешанные вторые производные функции U непрерывны. Но тогда можно воспользоваться теоремой о независимости результата от порядка дифференцирования, которая дает

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x},$$

откуда сразу следует

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Это есть условие (2), из выполнения которого по только что доказанной теореме следует независимость криволинейного интеграла от пути, что и утверждалось.

Доказательство достаточности. Допустим, что криволинейный интеграл $\int\limits_L P dx+Q dy$ не зависит от пути интегрирования, и покажем, что выражение $Pdx+Qdy$ является полным дифференциалом. При этом будет построена функция, полный дифференциал которой равен этому выражению. Пусть путь интегрирования L соединяет некоторую фиксированную точку (x_0, y_0) и произвольную точку (x_1, y_1). Так как по любому пути, соединяющему эти точки, интеграл будет иметь то же самое значение, то его величина однозначно определяется координатами точки (x_1, y_1), т. е. является функцией этой точки. Мы можем написать

$$\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=U(x_1, y_1).$$

Здесь можно не указывать пути интегрирования, ограничившись указанием лишь координат начальной и конечной точек, поскольку задание их полностью определяет величину интеграла.

Покажем теперь, что функция U является дифференцируемой функцией своих аргументов и *ее полный дифференциал равен выражению* (4). Для этой цели дадим аргументам x_1, y_1 приращения Δx, Δy и определим полное приращение функции U. Имеем

$$\Delta U = U(x_1+\Delta x,\ y_1+\Delta y) - U(x_1,\ y_1) =$$

$$= \int\limits_{(x_0,\ y_0)}^{(x_1+\Delta x,\ y_1+\Delta y)} Pdx + Qdy - \int\limits_{(x_0,\ y_0)}^{(x_1,\ y_1)} Pdx + Qdy.$$

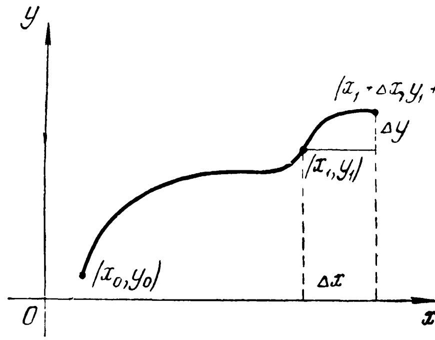


Рис. 44

Благодаря независимости интеграла от пути путь интегрирования для первого интеграла $\int\limits_{(x_0,\ y_0)}^{(x_1+\Delta x,\ y_1+\Delta y)}$ можно провести так, чтобы он прошел через точку $(x_1,\ y_1)$.

Разложив этот интеграл на сумму

$$\int\limits_{(x_0,\ y_0)}^{(x_1+\Delta x,\ y_1+\Delta y)} = \int\limits_{(x_0,\ y_0)}^{(x_1,\ y_1)} + \int\limits_{(x_1,\ y_1)}^{(x_1+\Delta x,\ y_1+\Delta y_1)},$$

найдем, что при подстановке этой суммы в выражение ΔU первый интеграл уничтожится и тогда

$$\Delta U = \int\limits_{(x_1,\ y_1)}^{(x_1+\Delta x,\ y_1+\Delta y)} Pdx + Qdy. \tag{5}$$

Последний интеграл снова можно вычислять по любому пути. Выберем поэтому в качестве пути интегрирования ломаную, звенья которой параллельны координатным осям (рис. 44). Для горизонтального участка $y = y_1$, $dy = 0$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_1 + \Delta x$, а для вертикального $x=x_1+\Delta x$, $dx=0$, $y_1 \leqslant y \leqslant y_1+\Delta y$. Следовательно, выражение (5) для приращения ΔU можно записать в виде

$$\Delta U = \int\limits_{x_1}^{x_1+\Delta x} P(x, y_1)\,dx + \int\limits_{y_1}^{y_1+\Delta y} Q(x_1+\Delta x, y)\,dy. \tag{6}$$

Применив к каждому из определенных интегралов (6) теорему о среднем, получим

$$\Delta U = P(x_1+\vartheta_1\Delta x, y_1)\,\Delta x + Q(x_1+\Delta x, y_1+\vartheta_2\Delta y)\,\Delta y. \tag{7}$$

Положим теперь

$$P(x_1+\vartheta_1\Delta x, y_1) - P(x_1, y_1) = \varepsilon_1,$$

$$Q(x_1+\Delta x, y_1+\vartheta_2\Delta y) - Q(x_1, y_1) = \varepsilon_2.$$

Из непрерывности функций P и Q следует, что при $\Delta x, \Delta y \to 0$ разности ε_1, ε_2 стремятся к нулю. Использовав введенные обозначения, перепишем выражение (7) для ΔU так:

$$\Delta U = P(x_1, y_1)\,\Delta x + Q(x_1, y_1)\,\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y. \tag{8}$$

Итак, приращение функции U представлено в равенстве (8) в виде суммы главной линейной части и бесконечно малых более высокого порядка, чем Δx, Δy. Этим доказана дифференцируемость функции U. Главная линейная часть приращения функции U имеет вид

$$P(x_1, y_1)\,\Delta x + Q(x_1, y_1)\,\Delta y,$$

что означает равенство

$$dU = P dx + Q dy.$$

Тем самым теорема полностью доказана.

Как известно, из равенства $dU=0$ в области G вытекает $U=\mathrm{const}$. Отсюда следует, что две первообразные от одного и того же дифференциального выражения могут отличаться лишь на постоянное слагаемое. Если обозначить через $U(x, y)$ какую-либо о п р е д е л е н н у ю первообразную для выражения (4), то по доказанной теореме

$$\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = U(x_1, y_1) + C.$$

Полагая здесь $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, найдем, что $C = -U(x_0, y_0)$, т. е.

$$\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = U(x_1, y_1) - U(x_0, y_0). \tag{9}$$

Формулу (9) называют *формулой Ньютона-Лейбница для криволинейных интегралов*. Таким образом, *криволинейный интеграл от полного дифференциала равен приращению первообразной функции.*

§ 6. Некоторые приложения криволинейных интегралов в геометрии и физике

Познакомимся с некоторыми задачами геометрии и физики, в которых используется криволинейный интеграл второго типа.

З а д а ч а. 1. *Площадь плоской фигуры.* Площадь области может быть легко выражена через криволинейный интеграл второго типа. Примем в формуле Грина $P=-y$, $Q=x$. Тогда $\frac{\partial Q}{\partial x}=1$, $\frac{\partial P}{\partial y}=$ $=-1$ и

$$\int_C xdy-ydx=\iint_G (1+1)\,dxdy,$$

откуда следует, что площадь области G равна

$$Q=\frac{1}{2}\int_C xdy-ydx. \qquad (1)$$

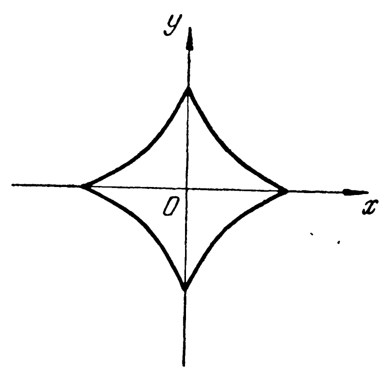


Рис. 45

Формула (1) в ряде случаев очень удобна для нахождения площади плоской фигуры.

Пример 1. Вычислить площадь, ограниченную астроидой $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. (рис. 45).

Формула (1) дает

$$Q=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos^3 t\, 3\,a\sin^2 t\cos t-a\sin^3 t(-3\,a\cos^2 t\sin t)]\,dt.$$

В результате преобразований получаем

$$Q=\frac{3\,a^2}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t)\,dt=$$

$$=\frac{3\,a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t dt=\frac{3\,a^2}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\,t dt=\frac{3\,a^2}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\,t)\,dt=$$

$$=\frac{3\,a^2}{16}\left[t-\frac{1}{4}\sin 4\,t\right]_0^{2\pi}=\frac{3}{8}\pi a^2.$$

Задача 2. *Работа силового поля*. Если в области G плоскости задано силовое поле, то, как было установлено в § 3, работа сил поля при перемещении материальной точки по линии L выражается криволинейным интегралом

$$A=\int\limits_L P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy, \tag{2}$$

где функции P и Q суть проекции силы поля в точке (x, y) на координатные оси.

Пример 2. Вычислить работу, произведенную силой тяжести при перемещении материальной точки с массой m *г* из точки A в точку B в вертикальной плоскости.

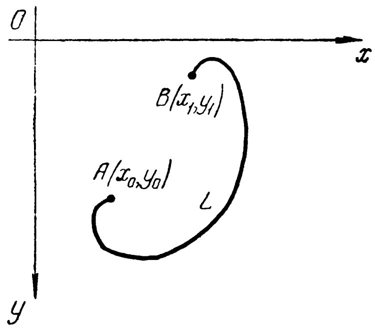


Рис. 46

Выберем в вертикальной плоскости движения точки координатные оси, причем ось Oy направим вертикально вниз. Координаты точек A и B обозначим, соответственно, через (x_0, y_0) и (x_1, y_1), а уравнение траектории L через $x=x(t)$, $y=y(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$ (рис. 46).

Для проекции силы тяжести находим $P(x, y)=0$ (проекция на ось Ox), $Q(x, y)=mg$ (проекция на ось Oy; $g=9{,}8$ *м/сек²* — ускорение силы тяжести). Работа выражается интегралом

$$A=\int\limits_L P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{t_0}^{t_1} mgy'(t)\,dt=mgy(t)\,\Big|_{t_0}^{t_1}=mg(y_1-y_0).$$

Отсюда видно, что работа сил тяжести не зависит от пути, по которому перемещается точка, а определяется разностью ординат начального и конечного положений точки. Это легко было предвидеть, так как условие $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ для данного интеграла выполняется.

Задача 3. *Потенциал силового поля.* Силовое поле называют *потенциальным,* если проекции P и Q сил поля являются частными производными, соответственно, по x и по y некоторой скалярной функции двух переменных, которую называют *потенциальной функцией.* Если P и Q удовлетворяют условиям

$$P=\frac{\partial U}{\partial x},\ Q=\frac{\partial U}{\partial y},$$

то дифференциальное выражение $P\,dx+Q\,dy$ является полным дифференциалом. Работа сил поля выражается интегралом $\int\limits_L P\,dx+Q\,dy$, который в этом случае не зависит от пути, а интеграл по замкнутому контуру равен нулю.

Таким образом, *силовое поле является потенциальным тогда и только тогда, когда работа сил поля не зависит от пути, а зависит лишь от начального и конечного положения точки.* Из теоремы предыдущего параграфа следует, что *для потенциальности плоского силового поля* $\bar{F}=P\bar{i}+Q\bar{j}$ *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{3}$$

которое называют поэтому *условием потенциальности.*

За потенциальную функцию поля можно принять любую первообразную выражения $Pdx+Qdy$, в частности криволинейный интеграл $\int\limits_{(x_0,\,y_0)}^{(x,\,y)} Pdx+Qdy$, отсчитываемый от произвольной фиксированной точки (x_0, y_0). В таком случае формула Ньютона-Лейбница для криволинейного интеграла (формула (9) из § 5) означает, что *работа в потенциальном поле равна разности потенциалов в конце и в начале пути.*

Чаще всего в качестве потенциальной функции выбирают такую первообразную, которая обращается в нуль на границе поля или для бесконечно удаленных точек (в бесконечности), если поле определено на всей плоскости. Учитывая теорему Ньютона-Лейбница, получаем новое определение потенциала поля, часто употребляющееся в физике: *потенциалом силового поля в данной точке называют работу, которую совершают силы поля при перемещении единичной точки из бесконечности в данную точку.*

При этом под единичной точкой в случае механических сил следует понимать материальную точку единичной м а с с ы, для электростатического поля — точку с единичным з а р я д о м и т. п.

Пример 3. По закону Ньютона материальные точки притягивают друг друга с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Пусть в начале координат помещена материальная точка, имеющая массу m, которая создает поле тяготения (*гравитационное поле*). Определить силу, действующую на единичную массу в точке с координатами (x, y). Доказать, что гравитационное поле потенциально, и найти потенциальную функцию.

Сила, действующая в точке (x, y), направлена к началу координат и ее величина равна

$$F=\frac{km}{r^2},$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2}$ — расстояние точки от начала координат. Проекции силы на оси Ox и Oy равны, соответственно,

$$F_x=-F\cos\alpha, \quad F_y=-F\sin\alpha,$$

где (рис. 47)

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}, \quad \sin\alpha=\frac{y}{r}.$$

Обозначим $km=\mu$. Для проекций сил поля получаем

$$P(x, y)=F_x=-\frac{\mu x}{r^3}, \quad Q(x, y)=F_y=-\frac{\mu y}{r^3}. \tag{4}$$

Силу $\overline{F}$ можно записать векторно в виде

$$\overline{F}=-\frac{\mu x\overline{i}+\mu y\overline{j}}{r^3}=-\mu\frac{\overline{r}}{r^3}.$$

Докажем, что гравитационное поле потенциально. Для этого достаточно проверить выполнение условия потенциальности (3). При дифференцировании функций (4) будем считать $r=\sqrt{x^2+y^2}$ промежуточным аргументом. Итак,

$$P(x, y)=-\frac{\mu x}{r^3}, \quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{3\mu x}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{3\mu xy}{r^5};$$

$$Q(x, y)=-\frac{\mu y}{r^3}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{3\mu y}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{3\mu xy}{r^5}.$$

Здесь мы воспользовались выражениями для производных

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}.$$

Из полученных выражений видим, что $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, чем доказана потенциальность гравитационного поля.

Найдем теперь потенциальную функцию. Для этого рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\mu\frac{xdx+ydy}{r^3}=U(x, y)-U(x_0, y_0).$$

Заметим, что

$$-\frac{xdx+ydy}{r^3}=d\frac{1}{r}.$$

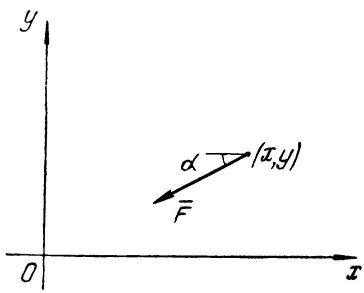
Поэтому мы получаем

$$U(x, y)=\mu\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right),$$

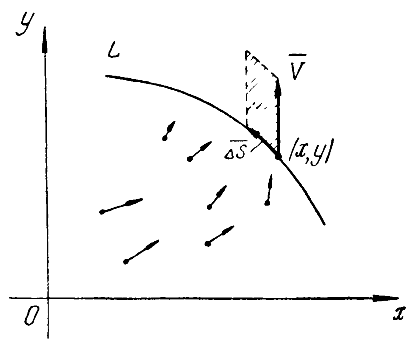
причем эта функция U обращается в нуль при $r=r_0$. При $r_0 \to \infty$ второй член исчезает, следовательно, потенциал гравитационного поля

$$U(x,\ y)=\frac{\mu}{r}.$$

З а д а ч а 4. *Плоское установившееся течение жидкости.* Под *установившимся* течением жидкости понимают такое, при котором каждая частица жидкости в определенной точке имеет вполне определенную скорость, не меняющуюся со временем. Движение называют *плоским,* если в любой из некоторого пучка параллельных между собой плоскостей (например, во всех горизонтальных плоскостях) распределение скоростей будет одним и тем же. Тогда достаточно рассматривать движение жидкости в о д н о й п л о с к о с т и.



Р и с. 47



Р и с. 48

Оно будет определяться *полем скоростей* — в каждой точке поля частица жидкости имеет определенную по величине и направлению скорость.

С математической точки зрения поле скоростей есть векторное поле — каждой точке поля ставится в соответствие определенный вектор $\overline{V}=\overline{V}(x,\ y)$. Проекции его на оси координат обозначим, как обычно, через P и Q,

$$\overline{V}=P(x,\ y)\,\overline{i}+Q(x,\ y)\,\overline{j}. \tag{5}$$

Пусть в поле задана некоторая кривая L (рис. 48). Определим количество жидкости, протекающей через эту кривую за единицу времени. Выделим на кривой элемент Δs и будем считать, что скорости частиц жидкости во всех точках этого участка одинаковы и равны $\overline{V}(x,\ y)$.

Количество жидкости, протекающей через элемент Δs, выразится площадью параллелограмма, заштрихованного на рис. 48. Величину этой площади можно получить как модуль векторного произведения

$$\Delta K=\left|[\overline{V},\ \overline{\Delta s}]\right|=\begin{vmatrix} P & Q \\ \Delta x & \Delta y \end{vmatrix}=P(x,\ y)\,\Delta y-Q(x,\ y)\,\Delta x. \tag{6}$$

Суммируя равенства (6) и переходя к пределу, получим для количества жидкости выражение через криволинейный интеграл

$$K = \int_L P(x, y)\,dy - Q(x, y)\,dx. \tag{7}$$

Величину K, определенную формулой (7) для векторного поля (5), называют *потоком векторного поля.*

Если кривая L замкнута и внутри ограниченной ею области нет источников и стоков жидкости, то интеграл по замкнутому контуру равен нулю*

$$\int_L P\,dy - Q\,dx = 0,$$

так как количество жидкости внутри контура остается постоянным и через L должно вытекать столько же жидкости, сколько и втекает. При этом должно выполняться условие

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}$$

или

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0.$$

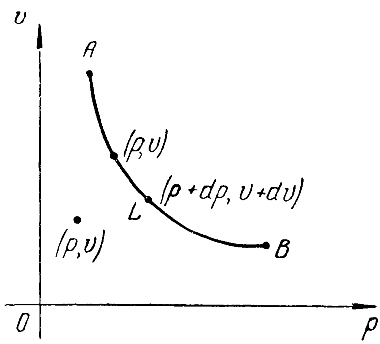


Рис. 49

Это условие называют условием *соленоидальности* плоского векторного поля.

Задача 5. *Количество тепла и энтропия идеального газа.* Рассмотрим некоторую массу газа. Его термодинамическое состояние вполне характеризуется давлением p, объемом v и абсолютной температурой T. Предположим, что мы имеем дело *с идеальным газом,* который удовлетворяет *уравнению состояния*

$$pv = RT, \qquad (R = \text{const}) \tag{8}$$

которое называется уравнением Клапейрона — Менделеева. В этом случае характеристики газа не являются независимыми между собой, и для определения состояния газа достаточно задать две из перечисленных выше трех величин.

Выберем в качестве независимых переменных, характеризующих состояние газа, величины p и v. Тогда состояние газа изобразится точкой плоскости pOv (рис. 49). Кривая L на этой плоскости соответствует некоторому определенному термодинамическому процессу.

Подсчитаем количество тепла, которое поглощается (или выделяется) газом при переходе из состояния A в состояние B по кривой L (см. рис. 49).

---

* Часто, особенно в физических приложениях, криволинейный интеграл по замкнутому контуру обозначают знаком $\oint$.

Выделим на кривой L участок от точки (p, v) до точки $(p+dp, v+dv)$ и подсчитаем количество тепла dQ,* соответствующее этому участку. Поглощенное тепло расходуется, с одной стороны, на повышение температуры газа и, с другой — на механическую работу расширения. Можно считать эти процессы для бесконечно малого участка протекающими независимо, т. е. полагать нагревание происходящим при постоянном объеме, а расширение — при постоянной температуре.

Поглощение тепла за счет увеличения температуры равно $c_v dT$, где c_v означает теплоемкость при постоянной температуре. Поглощение тепла, расходуемое на расширение, измеряется механической работой pdv и равно $apdv$, где a — термический эквивалент работы (равный $\frac{1}{q}$, где q — механический эквивалент теплоты). Таким образом,

$$dQ = c_v dT + apdv.$$

Чтобы перейти снова к p и v, принятым нами в качестве независимых переменных, найдем dT из уравнения (8). Продифференцировав обе части уравнения (8), получим

$$RdT = pdv + vdp,$$

так что

$$dQ = \frac{c_v}{R}(pdv + vdp) + apdv = \frac{c_v}{R} vdp + \left(\frac{c_v}{R} + a\right) pdv$$

или

$$dQ = \frac{c_v}{R} vdp + \frac{c_v + aR}{R} pdv. \tag{9}$$

Выясним смысл коэффициента $c_v + aR$ в равенстве (9). Положив $dp = 0$, найдем

$$dT = \frac{p}{R} dv \quad \text{и} \quad dQ = (c_v + aR)\frac{p}{R} dv,$$

откуда

$$dQ = (c_v + aR)\, dT.$$

Из последнего равенства видно, что коэффициент при dT означает теплоемкость при постоянном давлении, которую мы обозначим через c_p. Итак,

$$c_p = c_v + aR. \tag{10}$$

---

* Напомним, что дифференциалы независимых переменных равны их приращениям, а дифференциал функции отличается от приращения бесконечно малыми высших порядков, исчезающими при переходе к пределу.

Таким образом, окончательное выражение для dQ может быть, вместо (9), записано в виде

$$dQ = \frac{1}{R}(c_v v dp + c_p p dv). \tag{11}$$

Мы можем теперь определить количество тепла, поглощенного газом при изменении состояния от A к B по кривой L. Оно выразится криволинейным интегралом

$$Q = \int\limits_L \frac{c_v}{R} v dp + \frac{c_p}{R} p dv. \tag{12}$$

Отметим, что криволинейный интеграл (12) зависит от пути интегрирования, т. е. количество тепла зависит не только от начального и конечного состояний, но и от того, через какие промежуточные состояния газ проходит. В самом деле,

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{c_v}{R} v\right) = \frac{c_v}{R}, \quad \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{c_p}{R} p\right) = \frac{c_p}{R},$$

а из равенства (10) видно, что $c_p \neq c_v$. Поэтому условие независимости от пути не выполнено. Следовательно, количество поглощенного тепла не определяется состоянием газа, *не является функцией состояния* и выражение (11) не является полным дифференциалом.

Умножив выражение (11) на специально подобранный множитель (интегрирующий множитель*), можно превратить его в полный дифференциал некоторой функции. Интегрирующим множителем для выражения (11) является $\frac{1}{T}$. В этом легко убедиться, если заметить, что из уравнения (8) следует $\frac{1}{T} = \frac{R}{pv}$; тогда

$$\frac{dQ}{T} = c_v \frac{dp}{p} + c_p \frac{dv}{v}. \tag{13}$$

Выражение (13) является уже полным дифференциалом. Следовательно, криволинейный интеграл от этого выражения не зависит от пути интегрирования и определяет некоторую функцию точки

* См., например, Р. С. Гутер и А. Р. Янпольский, Дифференциальные уравнения, изд. ВИА, 1959 г., гл. I, § 5 или любое другое пособие по дифференциальным уравнениям.

плоскости *pOv,* т. е. *функцию состояния идеального газа*. Эта функция

$$S = \int_L \frac{dQ}{T}$$

носит название *энтропии идеального газа*.

Учитывая равенство (13), можем получить

$$S = \int_l c_v \frac{dp}{p} + c_p \frac{dv}{v} = c_v \ln p + c_p \ln v + \ln C$$

или окончательно

$$S = \ln C v^{c_p} p^{c_v}.$$

ГЛАВА III

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Криволинейный интеграл по пространственной кривой

В настоящей главе мы очень кратко остановимся на возможностях, которые могут представиться при интегрировании функции трех переменных, и рассмотрим некоторые общие соображения, касающиеся понятия интеграла.

Для функции трех переменных можно построить три различных понятия интеграла, к каждому из которых приводит большое число различных задач. Чтобы сохранить единообразие, мы выберем для иллюстрации различных понятий интеграла задачу о нахождении массы; на этой задаче легко можно усвоить особенности в построении интегральных сумм.

Задача 1. *Масса пространственной материальной линии.* Нет нужды повторять, что следует понимать под материальной линией и ее линейной плотностью в данной точке. Это было достаточно подробно рассмотрено в § 1 предыдущей главы. Отличие от разобранной там задачи состоит лишь в том, что точки линии имеют здесь три координаты (x, y, z), так что линейная плотность есть функция трех переменных,

$$\gamma=\gamma(x, y, z) \text{ г/см}. \tag{1}$$

Дальше остается действовать по той же схеме, которая дает

$$m=\int_L f(x, y, z)\,ds=\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta s\to 0}}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta s_i. \tag{2}$$

Замена длины участка Δs_i в интегральной сумме (2) проекцией участка на соответствующую координатную ось приводит к трем иным интегральным суммам

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta x_i,$$
$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta y_i, \tag{3}$$
$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta z_i.$$

Предел каждой из интегральных сумм (3) называют *криволинейным интегралом второго типа* или *криволинейным интегралом по координатам* по пространственной кривой, например,

$$\int_L f(x,\ y,\ z)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x=0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)\,\Delta x_i.$$

Впрочем, в большинстве случаев рассматриваются три функции трех переменных $P(x,\ y,\ z)$, $Q(x,\ y,\ z)$ и $R(x,\ y,\ z)$ и под криволинейным интегралом второго типа по пространственной кривой понимают интеграл вида

$$\int_L P(x,\ y,\ z)\,dx + Q(x,\ y,\ z)\,dy + R(x,\ y,\ z)\,dz. \tag{4}$$

Рассматривая силовое поле, проекции сил которого на координатные оси равны, соответственно, P, Q и R, найдем, что интеграл (4) выражает *работу сил поля при перемещении точки по кривой* L.

Более детальное изучение криволинейных интегралов по пространственной кривой в пределах нашей программы невозможно.

§ 2. Интегралы по поверхности

Если оставить в стороне опасения быть понятыми буквально, то можно сказать, что интеграл по поверхности так относится к двойному интегралу, как криволинейный интеграл к обычному определенному. Понятие интеграла по поверхности хорошо иллюстрируется следующей задачей.

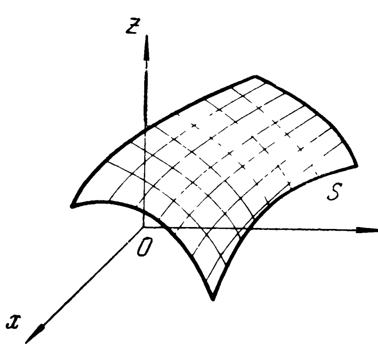


Рис. 50

Задача 2. *Масса материальной поверхности.* По поводу материальной поверхности можно повторить все то, что было сказано в § 1 главы I о плоском диске, с тем лишь добавлением, что материальная поверхность может оказаться кривой поверхностью. Читатель может представлять себе в качестве примера изогнутый лист кровельного железа. Понятие поверхностной плотности $\rho = \rho(x, y, z)$, являющейся функцией точки поверхности, т. е. функцией трех переменных, в дополнительных разъяснениях не нуждается.

Для нахождения массы поверхности разобьем поверхность S на участки, как это показано на рис. 50. Выделив на каждом участке произвольную точку (ξ, η, ζ) и считая плотность во всех точках этого участка постоянной, для массы участка получим приближенное выражение

$$\Delta m \approx \rho(\xi,\ \eta,\ \zeta)\,\Delta\sigma, \tag{1}$$

где $\Delta\sigma$ означает площадь данного участка поверхности. Просуммировав выражения (1) по всем участкам поверхности, а затем перейдя к пределу, получим выражение массы поверхности в виде

$$m = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \sum \rho(\xi, \eta, \zeta) \Delta\sigma.$$

Предел такого рода интегральной суммы для произвольной функции $f(x, y, z)$ носит название *интеграла по поверхности первого типа**. Его обозначение

$$\iint_S f(x, y, z)\, d\sigma = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \sum f(\xi, \eta, \zeta) \Delta\sigma. \qquad (2)$$

Очевидно, что двойной интеграл является частным случаем интеграла по поверхности, когда поверхность S является областью G плоскости xOy. Столь же очевидно, что интеграл по поверхности обладает всеми свойствами двойного интеграла, установленными в § 2 главы I.

Заменяя площадь элементарной площадки $\Delta\sigma$ площадью ее проекций на координатные плоскости, как это делалось для криволинейного интеграла, приходим к понятию *интеграла по поверхности второго типа*. Обычно его записывают в форме

$$\iint_S P(x, y, z)\, dydz + Q(x, y, z)\, dzdx + R(x, y, z)\, dxdy. \qquad (3)$$

На выяснении физического смысла интеграла по поверхности мы останавливаться не будем.

Интегралы по поверхности сводятся к двойным интегралам, что решает вопрос об их вычислении. Отметим еще, что интегралы по поверхности второго типа зависят от стороны поверхности, по которой они берутся**, и изменяют знак на противоположный при переходе от одной стороны поверхности к другой. Это свойство играет важную роль в физических приложениях.

§ 3. Тройной интеграл

Тройной интеграл представляет собой непосредственное и естественное обобщение понятий двойного и определенного интеграла. Так как геометрическая интерпретация его в пределах пространства трех измерений уже невозможна, обратимся снова к задаче о массе.

Задача 3. *Масса тела.* Пусть в трехмерном пространстве дано неоднородное тело, плотность которого в различных точках различна. При этом под плотностью здесь мы будем понимать обычную объемную плотность, имеющую размерность *г/см*^{3}. Эта плот-

---

* Мы несколько отступаем от аналогий в словоупотреблении, полагая, что термин «поверхностный интеграл» может вызвать нежелательные ассоциации

** Выбор стороны поверхности определяется выбором того или иного из двух возможных направлений нормали к поверхности, в предположении непрерывного ее изменения.

ность будет, следовательно, функцией координат точки тела, т. е. функцией трех переменных,

$$\delta=\delta(x, y, z).$$

Для нахождения массы тела G разобьем его плоскостями, параллельными координатным плоскостям, на элементарные части. Подобно разбиению плоской области (рис. 5), мы получим элементарные части, являющиеся параллелепипедами, лежащими строго внутри G, или частями параллелепипедов, примыкающими к границе. Для параллелепипедов можно получить приближенное значение массы, считая плотность в каждой его точке одинаковой. Тогда

$$\Delta m \approx \delta(\xi, \eta, \zeta)\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z, \tag{1}$$

где $\Delta x\, \Delta y\, \Delta z=\Delta v$ есть объем элементарного параллелепипеда.

Суммирование выражений (1) по трем направлениям по всем таким параллелепипедам приводит к *тройной интегральной сумме*

$$\sum\sum\sum \delta(\xi, \eta, \zeta)\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z, \tag{2}$$

предел которой при обычных предположениях и приводит к *тройному интегралу*

$$m=\iiint\limits_G \delta(x, y, z)\, dxdydz = \lim \sum\sum\sum \delta(\xi, \eta, \zeta)\, \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Обычным путем можно убедиться в том, что тройной интеграл обладает теми же свойствами, что и интегралы, рассмотренные ранее. Что касается вычисления тройного интеграла, то его можно привести к трехкратному интегрированию по каждой из переменных в отдельности. Подробно на этом вопросе мы останавливаться не будем.

§ 4. Связь между интегралами различных типов. Общее понятие интеграла

Между различными интегралами для функции трех переменных существуют определенные соотношения. Так, тройной интеграл по пространственной области G связан с интегралом по замкнутой поверхности S, служащей границей G, *формулой Остроградского*

$$\iint\limits_S P(x, y, z)\, dydz+Q(x, y, z)\, dzdx+R(x, y, z)\, dxdy=$$

$$=\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz. \tag{1}$$

Мы не будем точно формулировать условия, при которых имеет место равенство (1). Отметим лишь, что теорема Грина, о которой говорилось в § 4 предыдущей главы, может рассматриваться как частный случай этой теоремы. Остроградским была установлена также аналогичная связь между различными интегралами для функции n переменных.

Интеграл по поверхности S (не замкнутой) связан с криволинейным интегралом по замкнутой кривой C, которая служит границей поверхности S, *формулой Стокса*

$$\int\limits_C Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \quad (2)$$

Эти формулы играют существенную роль в физических приложениях кратных интегралов, при изучении векторного поля и легко могут быть доказаны с использованием вектор-функций. В координатной форме формулы (1) и (2) можно установить теми же приемами, что и формулу Грина.

Приведем некоторые общие соображения, касающиеся понятия интеграла.

Из предыдущего изложения мы познакомились с тем, что для функции двух переменных существует два различных понятия интеграла: двойной и криволинейный. Для функции трех переменных можно определить уже три различных понятия интеграла — криволинейный интеграл по пространственной кривой, интеграл по поверхности и тройной интеграл. Для функции n переменных, оказывается, возможны n различных определений интеграла.

Однако все они (если оставить пока в стороне интегралы второго типа, которые также могут быть приведены к интегралам первого типа) обладают свойствами, общими между собой и с определенным интегралом, который, кстати сказать, для функции одной переменной является единственным. Да и при рассмотрении интегральных сумм легко заметить единообразие в их построении.

Это единообразие в построении интегралов и их свойствах хорошо разъясняется, если рассматривать заданную функцию как функцию точки. Тогда можно указать общий процесс построения интегральных сумм и интеграла для всех случаев.

Действительно, рассмотрим функцию точки, заданную в некоторой области, и построим для нее интегральную сумму следующим образом. Разобьем область на достаточно большое число частей, в каждой из которых выбрана произвольная точка, и составим *сумму произведений значений функции в выбранных точках на меру соответствующего участка разбиения*. Это будет интегральная сумма, но она может иметь различный смысл, смотря по тому, в какой области задана функция, каковы части этой области и что означает их мера.

Если наша функция зависит от одного переменного, то она может быть задана лишь на отрезке; части его являются также отрезками и их естественной мерой является их длина. Таким образом, получаем обычную интегральную сумму для функции одного переменного.

Функция двух переменных представляет уже больше возможностей. Она может быть задана в плоской области или на кривой, являющейся одномерной областью. Элементарными частями плоской области служат прямоугольники или другие плоские фигуры, естественной мерой которых является п л о щ а д ь. Интегральная сумма оказывается знакомой нам двойной интегральной суммой приводящей к двойному интегралу.

Иначе обстоит дело, когда функция задана на кривой. Частями кривой могут быть лишь участки дуги, естественной мерой которых является не площадь, а снова д л и н а. Здесь мы получаем уже совсем иную интегральную сумму, приводящую к криволинейному интегралу первого типа.

Теперь ясно, почему для функции трех переменных можно определить три различных понятия интеграла, а для функции n переменных — даже n. Действительно, функция трех переменных может иметь в качестве области определения множество трех, двух или одного измерения — область пространства, поверхность или кривую. Естественной мерой области пространства или ее части является о б ъ е м, так что интегральная сумма будет здесь тройной интегральной суммой, которая приведет к тройному интегралу.

Для поверхности или для площадок, являющихся ее частями, естественной мерой будет уже не объем, но п л о щ а д ь, и интегральная сумма оказывается суммой, приводящей к интегралу по поверхности первого типа. Наконец, если функция задана на кривой, то тогда мерой является снова д л и н а, и мы снова приходим к криволинейному интегралу, уже по пространственной кривой.

Итак, приведенное выше определение интегральной суммы, как *суммы произведений значений функции в выбранных точках на м е р у соответствующих участков разбиения,* содержит в качестве частных случаев все рассматривавшиеся выше различные интегральные суммы в зависимости от того, в какой области задана функция, и что следует понимать под м е р о ю в этой области. Суммы для интегралов второго типа в эту схему не укладываются.

Напрашивающееся определение: *«Предел интегральной суммы, когда число участков разбиения неограниченно возрастает так, что диаметр каждого участка стремится к нулю, называется интегралом»* — содержит поэтому все те определения интеграла, которые рассматривались во всех трех главах (опять-таки, кроме интегралов второго типа). Эта возможность общего, единого определения всех интегралов естественно порождает и общность их свойств.

Перечислим коротко эти свойства в общем виде, не заботясь об их точной формулировке, только для той цели, чтобы показать их полное единство.

1. Постоянный множитель выносится за знак интеграла (свойство о д н о р о д н о с т и).

2. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от отдельных слагаемых (свойство аддитивности относительно функции).

3. Интеграл по сумме областей равен сумме интегралов по отдельным областям (свойство аддитивности относительно области).

4. Неравенство между функциями переходит в неравенство между интегралами.

5. Интеграл от единицы равен мере области.

6. Если функция заключена между числами m и M, то интеграл ее заключен между произведением чисел m и M на меру области.

7. Интеграл от непрерывной функции равен произведению некоторого среднего значения функции на меру области интегрирования (теорема о среднем).

8. Если область интегрирования ориентирована, то при перемене направления интегрирования величина интеграла изменяет знак.

Заменяя здесь слово «мера области», соответственно, длиной, площадью или объемом, получим свойства всех различных интегралов, рассмотренных ранее.

СОДЕРЖАНИЕ

КО ВСЕМ ЧИТАТЕЛЯМ

Отзывы и критические замечания по содержанию и оформлению издания, а также предложения или пожелания авторам просьба посылать по адресу: Москва, Ж-28, Покровский бульвар, 11. Редакционно-издательский отдел Академии.

Литературный редактор *Л. И. Миничева*

Технический редактор *В. П. Капланчикова*

Корректор *Л. Д. Шахбазова*

Г743557 Подписано к печати 15.8.60 г. Изд. № 362 Зак. 549

Печ. л. 5. Авт. л. 4,5. Бумага 60×92 1/16.

Типография ВИА имени В. В. Куйбышева

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать	По чьей вине
24	8 снизу	Ox, Oy	O_1u, O_1v	Автора
27	5 сверху	$\left\vert\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right.$	$\left\vert\begin{matrix} u=u_{ij} \\ v=v_{ij} \end{matrix}\right.$	»

Зак. 549